

ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz G i H będą grupami.

1. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$ oraz (korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup) że

$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$

2. Niech $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

- (a) Grupa $H \rtimes_{\varphi} G$ jest przemienna.
- (b) Grupy H i G są przemiennie oraz działanie φ jest trywialne.

3. Niech $\Psi : G \rightarrow H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ , tzn. homomorfizm $s : H \rightarrow G$ taki, że $\Psi \circ s = \text{id}_H$. Udowodnić, że

$$G \cong \ker(\Psi) \rtimes H.$$

4. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie p, q są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:

- (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$.
- (b) Jeśli p nie dzieli $q - 1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
- (c) Jeśli p dzieli $q - 1$, to istnieje nieprzemieniana grupa rzędu pq .

5. Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.

6. Załóżmy, że H jest p -podgrupą G i że H jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p -podgrupie Sylowa G .

7. Załóżmy, że $|G| = 196$. Udowodnić, że w G istnieje dzielnik normalny rzędu 49.

8. Znaleźć wszystkie p -podgrupy Sylowa S_p . Wywnioskować, że (tw. Wilsona)

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}.$$

9. Znaleźć wszystkie podgrupy Sylowa S_4 .
10. Znaleźć wszystkie podgrupy Sylowa \mathbb{Z}_n .
11. Znaleźć wszystkie podgrupy Sylowa D_n .