

ALGEBRA 1B, Lista 7

Niech G będzie grupą.

1. Udowodnić, że

- (a) istnieje monomorfizm $D_4 \rightarrow S_4$;
- (b) nie istnieje monomorfizm $Q_8 \rightarrow S_4$.

2. Załóżmy, że $|G| = 36$. Udowodnić, że:

- (a) istnieje $N \trianglelefteq G$ taka, że $N \neq \{e\}$ i $N \neq G$;
- (b) istnieje $N \trianglelefteq G$ taka, że $|N| = 4$ lub $|N| = 9$.

3. Niech A będzie podgrupą \mathbb{Z} . Udowodnić, że $A = \{0\}$ lub $A \cong \mathbb{Z}$.

4. Znaleźć produkt grup cyklicznych, z którym izomorficzna jest grupa

$$\mathbb{Z}^3 / \langle (10, 11, 8), (4, 7, 4), (4, 4, 4) \rangle.$$

5. Załóżmy, że mamy $a_1, b_1, \dots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{a_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{b_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$

Udowodnić, że $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$.

6. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:

- (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
- (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,
- (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i \mathbb{Z}_{315} .

7. Załóżmy, że grupa G jest skończona i że każdy element G ma rząd mniejszy bądź równy 2. Udowodnić, że istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że

$$G \cong (\mathbb{Z}_2)^l.$$