

ALGEBRA 1B, Lista 13

Niech R i S będzie pierścieniami przemiennymi z 1 i K będzie ciałem.

1. Dla każdej liczby pierwszej p , utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem \mathbb{Q} . Udowodnić, że:

$$\bigcap_{p \text{ pierwsza}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}.$$

2. Załóżmy, że R jest UFD i niech $f, g \in R[X]$. Udowodnić, że jeśli $\text{cont}(f) = 1 = \text{cont}(g)$, to $\text{cont}(fg) = 1$.
3. Udowodnić, że $X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, gdzie p jest liczbą pierwszą.
4. Znaleźć NWD i NWW dla:
 - (a) $X^4 - X$, $X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,
 - (b) $X^4 - X$, $X^6 - X$ w $\mathbb{C}[[X]]$,
 - (c) $4 - 2i$, $13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
 - (d) 13 , $12 + 5i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

5. Niech

$$R := \{a_0 + 2a_1X + \dots + 2a_nX^n \in \mathbb{Z}[X] \mid a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}\}.$$

Udowodnić, że:

- (a) R jest podpierścieniem $\mathbb{Z}[X]$;
 - (b) ideał $(2X) \cap (2X^2)$ nie jest główny w R ;
 - (c) elementy $2X$ i $2X^2$ nie mają NWW w R .
6. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) Istnieją R_1, R_2 niezerowe pierścienie z 1 takie, że $R \cong R_1 \times R_2$.
 - (b) Istnieją $u_1, u_2 \in R \setminus \{0\}$ takie, że $u_1 + u_2 = 1$, $u_1^2 = u_1$, $u_2^2 = u_2$.
 - (c) Istnieje $u \in R \setminus \{0, 1\}$, który jest *idempotentem*, to znaczy $u^2 = u$.
 7. Udowodnić, że $(R \times S)^* = R^* \times S^*$ (równość podzbiorów $R \times S$).
 8. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ i p_1, \dots, p_k są liczbami pierwszymi, które są parami różne. Udowodnić, że:
 - (a) Dla $\alpha \in \mathbb{N}$ i p pierwszej mamy $|\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*| = p^\alpha - p^{\alpha-1}$,
 - (b) $|\mathbb{Z}_n^*| = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$.
 9. Udowodnić, że $\mathbb{Q}[X, Y]/(XY) \cong \mathbb{Q}[X, Y]/(X) \times \mathbb{Q}[X, Y]/(Y)$.