

ALGEBRA 1B, Lista 2

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i G, H, N będą grupami.

1. Udowodnić, że jeśli $n > 2$, to grupa S_n nie jest przemienna.
2. Niech $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \text{ jest względnie pierwsza z } n\}$. Udowodnić, że:
 - (a) Mnożenie modulo n jest łączne na \mathbb{Z}_n .
 - (b) Mnożenie modulo n jest działaniem na \mathbb{Z}_n^* i $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą.
3. Napisać tabelkę D_3 .
4. Napisać tabelkę grupy izometrii prostokąta nie będącego kwadratem.
5. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g \in G$ udowodnić, że $g^k g^l = g^{k+l}$ oraz $(g^k)^l = g^{kl}$.
6. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja

$$f : A \rightarrow A, \quad f(a) := ma$$

jest homomorfizmem.

7. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3 .
8. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.
9. Znaleźć monomorfizm $\mathbb{Z}_n \rightarrow D_n$.
10. Niech G będzie grupą z zadania 4. Udowodnić, że G nie jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.
11. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.
12. Udowodnić, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem i $g \in G$, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g^m) = f(g)^m$.
13. Udowodnić, że
 - (a) złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem,
 - (b) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem,
 - (c) jeśli $G \cong H$ i $H \cong N$, to $G \cong N$.
14. Niech X będzie zbiorem równolicznym ze zbiorem Y . Znaleźć izomorfizm pomiędzy S_X i S_Y .