ALGEBRA 1B, Lista 4

Niech G będzie grupą i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że
$$(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_3, +_3) \cong (\mathbb{Z}_6, +_6).$$
Jak można uogólnić ten wynik?

2. Opisać orbity działania $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

3. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór
$$\forall a \in A \qquad 0 \cdot a = a, \quad 1 \cdot a = -a$$
zadaje działanie $\mathbb{Z}_2$ na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?

4. Udowodnić, że:

   (a) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja
   $$\phi_k : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$
   jest endomorfizmem.

   (b) Jeśli $\phi : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $\phi = \phi_k$.

   (c) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.

   (d) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

   (e) Funkcja
   $$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$
   jest izomorfizmem.

5. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\mathrm{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}$.

6. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.

7. Dla $n \geqslant 3$, opisać klasę sprzężoności (123) w S_n.

8. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.

9. Udowodnić, że wszystkie automorfizmy S_3 są wewnętrzne.

10. Udowodnić, że jeśli $H \leqslant G$ oraz $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteqslant G$ (tzn. dla każdego $g \in G$ mamy $gH = Hg$).