ALGEBRA 1B, Lista 5

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

1. Niech $g \in G$ będzie rzędu n. Udowodnić, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $g^m = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|m$.

2. Niech $g \in G$ będzie elementem rzędu 2 w G. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) $g \in Z(G)$,

   (b) $\{e, g\} \trianglelefteq G$.

3. Niech $g \in G$ będzie jedynym elementem rzędu 2 w G. Udowodnić, że $g \in Z(G)$.

4. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup, udowodnić, że:

   (a) $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$,

   (b) $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$,

   (c) $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

6. Podać przykład G i $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, takich że $N \ntrianglelefteq G$.

7. Niech p będzie liczbą pierwszą i załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

8. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.

9. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.

10. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.

11. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.

12. Niech G będzie podgrupą $S_\mathbb{R}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.