ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz G i H będą grupami.

1. Zadania 7. i 8. z Listy 5.

2. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$ oraz (korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup) że

$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$

3. Niech $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Grupa $H \rtimes_\varphi G$ jest przemienna.

   (b) Grupy H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.

4. Niech $\Psi : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ, tzn. homomorfizm $s : H \to G$ taki, że $\Psi \circ s = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że

$$G \cong \ker(\Psi) \rtimes H.$$

5. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie p, q są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:

   (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$.

   (b) Jeśli p nie dzieli $q-1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

   (c) Jeśli p dzieli $q-1$, to istnieje nieprzemienna grupa rzędu pq.

6. Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.

7. Załóżmy, że H jest p-podgrupą G i że H jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylowa G.

8. Załóżmy, że $|G| = 196$. Udowodnić, że w G istnieje dzielnik normalny rzędu 49.

9. Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylowa S_p. Wywnioskować, że (tw. Wilsona)

$$(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p).$$