

## ALGEBRA 1B, Lista 8

Niech  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  i  $G$  będzie grupą.

1. Udowodnić, że  $Q'_8 = \{I, -I\}$ .
2. Udowodnić, że (nie można korzystać z tego, że dla  $n \geq 5$  grupa  $A_n$  jest prosta!):
  - (a) Dla  $n \geq 1$  mamy  $(S_n)' = A_n$ .
  - (b) Dla  $n \geq 5$  mamy  $(A_n)' = A_n$ .

Wskazówka: Dla  $n \geq 3$  grupa  $A_n$  jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.
3. Udowodnić, że jeśli  $|G| = pq^2$ , gdzie  $p$  i  $q$  są liczbami pierwszymi, to  $G$  jest rozwiązalna.
4. Udowodnić, że jeśli  $|G| = 200$ , to  $G$  jest rozwiązalna.
5. Udowodnić, że jeśli  $|G| < 60$ , to  $G$  jest rozwiązalna.
6. Znaleźć największą liczbę  $n \in \mathbb{N}$ , dla której umie Pan/i pokazać, że dla każdej nieparzystej  $m < n$ , jeśli  $|G| = m$ , to  $G$  jest rozwiązalna.
7. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?
8. Udowodnić, że  $(\mathbb{Q}, +)$  nie ma ciągu:
  - (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
  - (b) kompozycyjnego.
9. Znaleźć ciąg kompozycyjny grupy  $\mathbb{Z}_n$ .