

## ALGEBRA 1B, Lista 1

Dla zbioru  $X$ ,  $\mathcal{P}(X)$  jest zbiorem wszystkich podzbiorów  $X$  i  $S_X$  jest zbiorem wszystkich bijekcji z  $X$  w  $X$ .

1. Podać przykład (tabelkę) działania  $\star$  na zbiorze  $\{0, 1\}$  takiego, że

$$0\star(0\star 0) \neq (0\star 0)\star 0.$$

Ile istnieje takich działań?

2. Udowodnić, że działanie  $+$  na zbiorze  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  (zdefiniowane na wykładzie) jest łączne i ma element neutralny, ale  $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +)$  nie jest grupą.
3. Udowodnić, że odejmowanie na  $\mathbb{Z}$  nie ma elementu neutralnego i że nie jest łączne.
4. Niech  $G$  będzie pewną grupą przekształceń  $X$ . Udowodnić, że  $\text{id}_X \in G$ .
5. Udowodnić, że jeśli  $X$  ma co najmniej 2 elementy, to  $(X, \cup)$  nie jest grupą, gdzie dla  $a, b \in X$  mamy  $a \cup b = a$ .
6. Niech  $*$  będzie działaniem na zbiorze  $X$  i  $a, b, c \in X$ . Udowodnić, że:
  - (a) Jeśli  $b$  i  $c$  są elementami neutralnymi  $*$ , to  $b = c$ .
  - (b) Jeśli  $*$  jest łączne, ma element neutralny  $e$ ,  $a * b = e$  i  $c * a = e$ , to  $b = c$ .
  - (c) Jeśli  $(X, *)$  jest grupą z elementem neutralnym  $e$  i  $a * b = e$ , to  $b * a = e$ .
7. Niech  $f : X \rightarrow X$ . Udowodnić, że:
  - (a) Funkcja  $f$  jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $g : X \rightarrow X$  taka, że  $f \circ g = \text{id}_X$ .
  - (b) Funkcja  $f$  jest "1-1" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje  $g : X \rightarrow X$  taka, że  $g \circ f = \text{id}_X$ .
8. Udowodnić, że jeśli  $|X| > 2$ , to grupa  $S_X$  nie jest przemienna.
9. Udowodnić, że jeśli  $X$  jest niepusty, to:
  - (a)  $(\mathcal{P}(X), \cup)$  nie jest grupą,
  - (b)  $(\mathcal{P}(X), \cap)$  nie jest grupą.