ALGEBRA 1B, Lista 13

Niech R i S będą pierścieniami przemiennymi z 1.

1. Dla każdej liczby pierwszej p, utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że:
$$\bigcap_{p\in\mathbb{P}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}.$$

2. Załóżmy, że R jest UFD i niech $f, g \in R[X]$. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{cont}(f) = 1 = \mathrm{cont}(g)$, to $\mathrm{cont}(fg) = 1$.

3. Udowodnić, że wielomian $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, gdzie p jest liczbą pierwszą.

4. Znaleźć NWD i NWW dla:

   (a) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,
   (b) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[\![X]\!]$,
   (c) $4 - 2i,\ 13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
   (d) $13,\ 12 + 5i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

5. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Istnieją R_1, R_2 niezerowe pierścienie z 1 takie, że $R \cong R_1 \times R_2$.
   (b) Istnieją $u_1, u_2 \in R \setminus \{0\}$ takie, że $u_1 + u_2 = 1,\ u_1^2 = u_1,\ u_2^2 = u_2$.
   (c) Istnieje $u \in R \setminus \{0, 1\}$, który jest *idempotentem*, to znaczy $u^2 = u$.

6. Udowodnić, że $(R \times S)^* = R^* \times S^*$ (równość podzbiorów $R \times S$).

7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ i $p_1, \dots, p_k$ są liczbami pierwszymi, które są parami różne. Udowodnić, że:

   (a) Dla $\alpha \in \mathbb{N}$ i p pierwszej mamy $|\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*| = p^\alpha - p^{\alpha-1}$,
   (b) $|\mathbb{Z}_n^*| = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k-1})$.

8. Udowodnić, że
$$\mathbb{Q}[X, Y]/(XY) \not\cong \mathbb{Q}[X, Y]/(X) \times \mathbb{Q}[X, Y]/(Y).$$