

## ALGEBRA 1B, Lista 2

Niech  $n \in \mathbb{N}_{>1}$  i  $G, H, N$  będą grupami.

1. Niech  $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \text{ jest względnie pierwsza z } n\}$ . Udowodnić, że:
  - (a) Mnożenie modulo  $n$  jest łączne na  $\mathbb{Z}_n$ .
  - (b) Mnożenie modulo  $n$  jest działaniem na  $\mathbb{Z}_n^*$  i  $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$  jest grupą.
2. Napisać tabelkę  $D_3$ .
3. Napisać tabelkę grupy izometrii prostokąta nie będącego kwadratem i udowodnić, że grupa ta nie jest izomorficzna z grupą  $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ .
4. Dla  $k, l \in \mathbb{Z}$  i  $g \in G$  udowodnić, że  $g^k g^l = g^{k+l}$  oraz  $(g^k)^l = g^{kl}$ .
5. Niech  $(A, +)$  będzie grupą przemienną i  $m \in \mathbb{Z}$ . Udowodnić, że funkcja

$$f : A \rightarrow A, \quad f(a) := ma$$

jest homomorfizmem.

6. Znaleźć izomorfizm pomiędzy  $D_3$  i  $S_3$ .
7. Znaleźć monomorfizm  $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .
8. Znaleźć monomorfizm  $\mathbb{Z}_n \rightarrow D_n$ .
9. Znaleźć monomorfizm  $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$ .
10. Udowodnić, że jeśli  $f : G \rightarrow H$  jest homomorfizmem i  $g \in G$ , to dla każdego  $m \in \mathbb{Z}$  mamy  $f(g^m) = f(g)^m$ .
11. Udowodnić, że
  - (a) złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem,
  - (b) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem,
  - (c) jeśli  $G \cong H$  i  $H \cong N$ , to  $G \cong N$ .
12. Niech  $X$  będzie zbiorem równolicznym ze zbiorem  $Y$ . Znaleźć izomorfizm pomiędzy  $S_X$  i  $S_Y$ .