ALGEBRA 1B, Lista 5

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

1. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup, udowodnić, że:
   (a) $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$,
   (b) $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$,
   (c) $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
3. Podać przykład G i $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, takich że $N \ntrianglelefteq G$.
4. Niech p będzie liczbą pierwszą i załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
5. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.
6. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.
7. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.
8. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.
9. Niech G będzie podgrupą $S_\mathbb{R}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.
10. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$ oraz (korzystając z zasadniczego twierdzenia o homomorfizmach grup), że
$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$
11. Niech $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
    (a) Grupa $H \rtimes_\varphi G$ jest przemienna.
    (b) Grupy H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.
12. Niech $\Psi : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ, tzn. homomorfizm $s : H \to G$ taki, że $\Psi \circ s = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że:
$$G \cong \ker(\Psi) \rtimes H.$$