ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech G i H będą grupami i p będzie liczbą pierwszą.

1. Niech $g \in G$ będzie elementem rzędu 2. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli g jest jedynym elementem rzędu 2 w G, to $g \in Z(G)$.
   (b) $\langle g \rangle \trianglelefteq G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g \in Z(G)$.
2. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie p, q są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:
   (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$.
   (b) Jeśli p nie dzieli $q-1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
   (c) Jeśli p dzieli $q-1$, to istnieje nieprzemienna grupa rzędu pq.
3. Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.
4. Załóżmy, że H jest p-podgrupą G i że H jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylowa G.
5. Opisać p-podgrupy Sylowa S_4 dla różnych liczb pierwszych p.
6. Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylowa S_p. Wywnioskować, że (tw. Wilsona)
$$(p-1)! \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p).$$
7. Udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 3$ istnieje monomorfizm $D_n \to S_n$.
8. Udowodnić, że nie istnieje monomorfizm $Q_8 \to S_4$.
9. Załóżmy, że $|G| = 196$. Udowodnić, że w G istnieje dzielnik normalny rzędu 49.
10. Załóżmy, że $|G| = 36$. Udowodnić, że istnieje $N \trianglelefteq G$ taka, że $N \neq \{e\}$ i $N \neq G$.