ALGEBRA 1B, Lista 7

Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i p liczbą pierwszą.

1. Udowodnić, że:
   (a) Podgrupa grupy cyklicznej jest cykliczna.
   (b) Jeśli A jest podgrupą $\mathbb{Z}$, to $A = \{0\}$ lub $A \cong \mathbb{Z}$.
2. Znaleźć produkt grup cyklicznych, z którym izomorficzna jest grupa
$$\mathbb{Z}^3/\langle(10, 11, 8), (4, 7, 4), (4, 4, 4)\rangle.$$
3. Załóżmy, że mamy $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ takie, że
$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{a_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{b_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$
   Udowodnić, że $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.
4. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
   (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
   (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,
   (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.
5. Załóżmy, że grupa G jest skończona i że każdy element G ma rząd mniejszy bądź równy 2. Udowodnić, że istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że
$$G \cong (\mathbb{Z}_2)^l.$$
6. Niech $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ i $\{b_1, \ldots, b_m\}$ będzie podzbiorem A składającym się ze wszystkich elementów rzędu 2.
   (a) Udowodnić, że:
$$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_m$$
   (jeśli $m = 0$, to przyjmujemy, że prawa strona równania to 0).
   (b) Udowodnić, że $p - 1$ jest jedynym elementem rzędu 2 w grupie $\mathbb{Z}_p^*$.
   (c) Wywnioskować tw. Wilsona.
7. *Odwrócenie Tw. Lagrange'a dla grup przemiennych*
   Załóżmy, że $|A| = n$ (cały czas zakładamy, że A jest przemienna!) i $k|n$. Udowodnić, że istnieje $H \leqslant A$ taka, że $|H| = k$.