

ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 1

1. Uzupełnić definicję **Top** z wykładu, to jest pokazać, że składanie funkcji ciągłych zachowuje relację homotopii.
2. Sformalizować definicje następujących kategorii: $\text{Top}(X)$, $\text{Iso}(\mathcal{C})$, \mathcal{C}^{op} , produktu kategorii.
3. Udowodnić, że obiekty początkowe i końcowe są jedyne z dokładnością do izomorfizmu. Znaleźć obiekty początkowe i końcowe (jeśli istnieją) we wszystkich kategoriach, które pojawiły się na wykładzie.
4. Niech F będzie funktorem a f morfizmem. Pokazać, że:
 - (a) Jeśli f jest izomorfizmem, to $F(f)$ jest izomorfizmem.
 - (b) Jeśli F jest wiernie pełny, to f jest izomorfizmem $\Leftrightarrow F(f)$ jest izomorfizmem.
 - (c) Podać przykład wiernego funktora F i morfizmu f takiego, że $F(f)$ jest izomorfizmem, ale f nie jest izomorfizmem.
 - (d) Podać przykład pełnego funktora F i morfizmu f takiego, że $F(f)$ jest izomorfizmem, ale f nie jest izomorfizmem.
5. Podać przykład funktora $F : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ takiego, że dla każdego $G \in \mathbf{Grp}$, $F(G) = G$ i F nie jest funktorem identycznościowym.
6. Podać przykład presnopa grup abelowych, który nie jest snopem.
7. Niech $(P, <)$ będzie częściowym porządkiem (posetem) i \mathcal{C} będzie kategorią, w której $\text{Ob}(\mathcal{C}) = P$ a morfizmy pochodzą od porządku $<$ (sformalizować!). Pokazać, że:
 - (a) Kategoria $\text{Top}(X)$ jest szczególnym przypadkiem powyższej konstrukcji.
 - (b) Istnieje funktor F z kategorii posetów (zdefiniować tę kategorię!) do **Top**, taki że \mathcal{C} odpowiada $\text{Top}(F(P))$.
 - (c) Dla dwóch posetów P, P' i odpowiadających im kategorii $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ funktory pomiędzy \mathcal{C} i \mathcal{C}' odpowiadają funkcjom pomiędzy P i P' , które zachowują porządek.
8. Czy presnop typów zupełnych jest snopem?