ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 2

1. Pokazać, że złożenie morfizmów funktorów jest morfizmem funktorów.

2. Niech $\mathbf{Ab}^f$ będzie kategorią skończonych grup abelowych. Pokazać, że $\mathbf{Ab}^f$ jest równoważna z $(\mathbf{Ab}^f)^{\mathrm{op}}$.

3. Pokazać, że kategorie $\mathrm{Func}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$ i $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D}^{\mathrm{op}})$ są izomorficzne.

4. Niech dla przestrzeni topologicznej X z punktem bazowym x,

$$\Sigma(X,x) = (X \times [0,1]/(X \times \{0,1\} \cup \{x\} \times [0,1]), [(x,0)])$$

$\Omega(X,x) = (\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((S^1,*),(X,x)), \text{pętla stała})$ z topologią zwarto-otwartą

Pokazać, że:

   (a) $\Sigma, \Omega : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Top}_*$ są funktorami.

   (b) Następujące (bi)funktory:

$$(\mathbf{Top}_*)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top}_* \ni ((X,x),(Y,y)) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}(\Sigma(X,x),(Y,y)) \in \mathbf{Set}$$

$$(\mathbf{Top}_*)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Top}_* \ni ((X,x),(Y,y)) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((X,x),\Omega(Y,y)) \in \mathbf{Set}$$

   są izomorficzne.

5. Dla pierścienia przemiennego R i R-modułu M, pokazać, że następujące (bi)funktory są izomorficzne:

$$(\mathbf{Mod}_R)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mod}_R \ni (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M \otimes_R X, Y) \in \mathbf{Mod}_R$$

$$(\mathbf{Mod}_R)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Mod}_R \ni (X,Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(X, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M,Y)) \in \mathbf{Mod}_R$$

6. Zdefiniować $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$, funktor grupy wolnej. Pokazać, że następujące (bi)funktory są izomorficzne:

$$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Grp} \ni (X,G) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}}(F(X),G) \in \mathbf{Set}$$

$$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Grp} \ni (X,G) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X,G) \in \mathbf{Set}.$$