ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 5

1. Niech $\mathcal{I}$ będzie dowolną kategoria, o której myślimy jako o kategorii indeksów, np. $\mathcal{I}$ to kategoria pochodząca od posetu.
   Udowodnić, że dla $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$, $X = \varprojlim F$ wtedy i tylko wtedy, gdy X reprezentuje funktor
   $$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \ni Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathcal{I},\mathcal{C})}(\Delta Y, F) \in \mathbf{Set},$$
   gdzie ΔY jest funktorem stałym: $\Delta Y(i) = Y, \Delta Y(f) = \mathrm{id}_Y$ dla każdego obiektu i w $\mathcal{I}$ i morfizmu f w $\mathcal{I}$.
   Sformułować analogiczne twierdzenie dla granic prostych.

2. Dla pary morfizmów $f, g : X \to Y$, ich *equalizer* (*equalizator*, *wyrównywacz*?), to $\varprojlim(f, g)$ a *coequalizer* (*koequalizator*, *kowyrównywacz*?), to $\varinjlim(f, g)$.

   (a) Narysować diagramy definiujące equalizer i coequalizer poprzez własność uniwersalną.

   (b) Znaleźć definicje jądra jako equalizera. Podobnie dla kojądra.

   (c) Znależć equalizery i coequalizery w **Set** i **Grp**.

3. Niech $\mathcal{I}$ będzie kategorią jak w zadaniu 1. Załóżmy, że w $\mathcal{C}$ istnieją produkty (również nieskończone) indeksowane $\mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ i equalizery. Niech $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$.

   (a) Pokazać, że istnieje $\varprojlim F$.

   (b) Sformułować twierdzenie dualne.

   (c) Podać przykłady kategorii w których istnieją granice proste lub odwrotne względem małych kategorii (np. posetów).

4. Pokazać, że w $\mathbf{Mod}_R$ granica systemu prostego $(M_i)_{i\in I}$, to
   $$\varinjlim(M_i)_{i\in I} = \bigoplus_{i\in I} M_i / \langle (w_j f_{ij} - w_i)(M_i) | \forall i \leqslant j \rangle,$$
   gdzie $w_i : M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ jest włożeniem w sumę prostą.
   Granica systemu odwrotnego $(M_i)_{i\in I}$, to
   $$\varprojlim(M_i)_{i\in I} = \{(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i | (\forall i \leqslant j) f_{ij}(a_j) = a_i\}.$$
   Opisać granice systemów prostych i odwrotnych w **Set** i **Ab**.