ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 6

1. Weźmy poset $\mathbb{N}$ z relacją podzielności i system prosty w **Ab**

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}}, \quad f_{nm}(x) = \frac{m}{n}x.$$

   Pokazać, że

   (a) $\varinjlim(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$,

   (b) $\varinjlim(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$,
   gdzie $\mathbb{Z}_{(p)}$ jest lokalizacją $\mathbb{Z}$ względem ideału pierwszego $p\mathbb{Z}$.

2. Pokazać, że w addytywnej kategorii $\mathcal{C}$ dla obiektów X_1, X_2 obiekt Y jest sumą prostą X_1, X_2 wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi dowolny z poniższych warunków:

   (a) $Y = X_1 \times X_2$.

   (b) $Y = X_1 \coprod X_2$.

   (c) Istnieją $i_1 : X_1 \to Y,\ i_2 : X_2 \to Y,\ b_1 : Y \to X_1,\ b_2 : Y \to X_2$ takie, że $b_1 i_1 = \mathrm{id}_{X_1},\ b_2 i_2 = \mathrm{id}_{X_2},\ b_1 i_1 + b_2 i_2 = \mathrm{id}_Y$.

3. Udowodniż, że w Ad-kategorii $\mathcal{C}$ i dla $X \in \mathcal{C}$ następujące warunki są równoważne

   (a) X jest obiektem zerowym.

   (b) X jest obiektem końcowym

   (c) X jest obiektem początkowym.

   (d) id_X jest elementem neutralnym w grupie abelowej $\mathrm{Hom}(X, X)$.

   (e) $\mathrm{Hom}(X, X) = \{0\}$.

4. Udowodnić, że funktor usnopienia $+ : \mathbf{Psh}_X \to \mathbf{Sh}_X$ jest lewym dołączonym do funktora zapominania $\mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Psh}_X$ i że w izomorfiźmie dołączenia dla dowolnego presnopa $\mathcal{F}$, $\mathrm{id}_{\mathcal{F}^+}$ odpowiada naturalnemu morfizmowi usnopienia $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$.

5. Udowodnić, że jeśli $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest lewo-dołączony do $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, to istnieje morfizm funktorów $f : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to GF$ taki, że dla każdego $X \in \mathcal{C}$, $f_X : X \to GF(X)$ odpowiada $\mathrm{id}_{F(X)}$ poprzez izomorfizm dołączenia i że dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$ izomorfizm dołączenia pokrywa się z funkcją

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(X), Y) \ni \alpha \mapsto G(\alpha) \circ f_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)).$$