ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 7

$\mathcal{A}$ jest kategorią abelową.

1. Jeśli $\mathcal{A}$ ma dostatecznie dużo obiektów projektywnych (injektywnych), to każdy obiekt ma rezolwentę projektywną (injektywną).

2. Udowodnić, że R-moduł M jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje R-moduł N, taki że $M \oplus N$ jest wolny.

3. Niech $f : M \to N$ będzie morfizmem, $X_* \to M$ kompleksem obiektów projektywnych (poza M) i $P_* \to N$ rezolwentą projektywną. Wtedy f przedłuża się do morfizmu kompleksów
$$f_* : (X_* \to M) \to (P_* \to N).$$

4. Pokazać, że dla każdego n, H^n jest funktorem z $\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ (kategoria kompleksów (kołańcuchów) obiektów $\mathcal{A}$) do $\mathcal{A}$.

5. Morfizmy kompleksów $f_*, g_* : (X_*, d_*) \to (Y_*, \delta_*)$ są *homotopijne* (oznaczenie $f_* \sim g_*$), gdy istnieją $(s_i : X_i \to Y_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ takie, że dla każdego i,
$$f_i - g_i = \delta_{i+1} s_i + s_{i-1} d_i.$$
Udowodnić, że jeśli $f_* \sim g_*$, to dla każdego n, $H_n(f_*) = H_n(g_*)$.

6. Udowodnić, że jeśli w zadaniu 2. mamy dwa przedłużenia
$$f_*, f'_* : (X_* \to M) \to (P_* \to N),$$
to $f_* \sim f'_*$.

7. Udowodnić Twierdzenie 1, tzn. że definicja funktorów pochodnych nie zależy od wyboru rezolwenty.