ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 8

$\mathcal{A}$ jest kategorią abelową.

1. **Lemat o 5 (5-Lemma)**Pokazać, że dla diagramu przemiennego w $\mathcal{A}$
$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ {\scriptstyle\alpha_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle\gamma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\beta_2} & & {\scriptstyle\alpha_2}\big\downarrow \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}\ ,$$
jeśli β_1, β_2 to izomorfizmy, α_1 to epimorfizm, α_2 to monomorfizm i wiersze są acykliczne poza A_1, A_5, B_1, B_5, to γ jest izomorfizmem.

2. **Ker-Coker Lemma** Weźmy diagram przemienny w $\mathcal{A}$
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ \big\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \big\downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}\ ,$$
w którym górny rząd jest acykliczny poza A i dolny rząd jest acykliczny poza C'.
Udowodnić, że istnieje morfizm $\delta : \ker(\gamma) \to \mathrm{coker}(\alpha)$ taki, że następujący ciąg jest acykliczny poza $\ker(\alpha)$ i $\mathrm{coker}(\gamma)$
$$\ker(\alpha) \longrightarrow \ker(\beta) \longrightarrow \ker(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}(\alpha) \longrightarrow \mathrm{coker}(\beta) \longrightarrow \mathrm{coker}(\gamma)$$

3. Niech $0 \to X_* \to Y_* \to Z_* \to 0$ będzie krótkim ciągiem dokładnym kompleksów cykli w $\mathcal{A}$ dla których wszystkie obiekty o indeksach ujemnych są zerowe. Udowodnić, że istnieje długi ciąg dokładny
$$\cdots \to H_2(Z_*) \to H_1(X_*) \to H_1(Y_*) \to H_1(Z_*) \to H_0(X_*) \to H_0(Y_*) \to H_0(Z_*) \to 0.$$

4. Udowodnić, że jeśli mamy ciąg dokładny $0 \to X \to X'' \to X' \to 0$ w $\mathcal{A}$ i rezolwenty projektywne, $P_* \to X$ i $P'_* \to X'$, to istnieje rezolwenta projektywna $P_* \oplus P'_* \to X''$.

5. Udowodnić, że dowolny funktor addytywny zachowuje sumę prostą.

6. Udowodnić Twierdzenie 3 z wykładu (o długim ciągu dokładnym lewych funktorów pochodnych (bez jednoznaczności i funktorialności)).

7. Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i weźmy $x \in R$, który nie jest dzielnikiem zera. Udowodnić, że
$$\mathrm{Tor}_1^R(R/x, M) = \{m \in M | xm = 0\}.$$