ALGEBRA HOMOLOGICZNA, Lista 9

1. Pokazać, że skończenie generowana grupa abelowa A jest wolna wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A,\mathbb{Z}) = 0$. Dla dowolnych A powyższa równoważność jest niezależna od ZFC (Shelah).

2. **Lemat Baera** Niech Q będzie R-modułem. Pokazać, że Q jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego ideału $I \subset R$ każdy homomorfizm R-modułów $\beta : I \to Q$ rozszerza się do R.

3. Pokazać, że grupa abelowa A jest injektywnym $\mathbb{Z}$-modułem wtedy i tylko wtedy, gdy A jest podzielna.

4. Pokazać, że w **Ab** jest dostatecznie wiele obiektów injektywnych.

5. Pokazać, że jeśli R jest S-algebrą, Q injektywnym S-modułem, to $\mathrm{Hom}_S(R,Q)$ jest injektywnym R-modułem.

6. Pokazać, że w $\mathbf{Mod}_R$ jest dostatecznie wiele obiektów injektywnych.

7. Dowieść, że ciąg G-modułów i homomorfizmów nazwany na wykładzie rezolwentą standardową jest wolną G-rezolwentą $\mathbb{Z}$.

8. Niech t oznacza generator $G = \mathbb{Z}/n$ i $N := 1 + t + \cdots + t^{n-1} \in \mathbb{Z}G$. Udowodnić, że poniższy ciąg G-modułów i G-homomorfizmów
$$\ldots \xrightarrow{\cdot(t-1)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\cdot(t-1)} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t \mapsto 1} \mathbb{Z} \longrightarrow 0\,.$$
jest dokładny.

9. Niech A będzie trywialnym $\mathbb{Z}/n$-modułem. Dla każdego n obliczyć $H_n(\mathbb{Z}/n, A)$ i $H^n(\mathbb{Z}/n, A)$.

10. Niech A będzie $\mathbb{Z}/2$-modułem, w którym nietrywialny element $\mathbb{Z}/2$ działa jako mnożenie przez -1. Dla każdego n obliczyć $H_n(\mathbb{Z}/2, A)$ i $H^n(\mathbb{Z}/2, A)$.

11. Dla liczby naturalnej n, która nie jest podzielna przez 8 opisać wszystkie rozszerzenia $\mathbb{Z}/n$ przez $\mathbb{Z}/2$ (tzn. $\mathbb{Z}/2$ ma być ilorazem).

12. Udowodnić, że $H^1(G, A)$ jest w bijekcji z klasami A-równoważnych rozszczepień rozszerzenia
$$1 \to A \to A \rtimes G \to 1.$$