ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 11

Pewne proste zastosowania kohomologii grup

Uwaga
Gdy mówimy o G-modułach (zawsze lewych!), to pojęcie $\mathbb{Z}$-modułu może być mylące – znaczenie może być klasyczne, tzn. $\mathbb{Z}$-moduł, to grupa abelowa lub jeśli $\mathbb{Z}$ rozumiemy jako grupę, to $\mathbb{Z}$-moduł można by rozumieć też jako $\mathbb{Z}\mathbb{Z}$-moduł. Zawsze jednak będziemy mieli na myśli klasyczne znaczenie, tzn. $\mathbb{Z}$-moduł jest po prostu grupą abelową czyli w terminach G-modułów jest $\{1\}$-modułem.

Lemat
Niech A i B będą G-modułami, gdzie G jest grupą skończoną. Wtedy:

1. Jeśli
$$\alpha := \sum_{g \in G} g \in \mathbb{Z}G,$$
to dla każdego $a \in A$, mamy $\alpha a \in A^G$.

2. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$ jest G-modułem z działaniem
$$(gf)(a) = gf(g^{-1}a) \quad \text{i} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)^G = \mathrm{Hom}_G(A, B).$$

Dowód
1. wynika z tego, że dla każdego $g \in G$ mamy $g\alpha = \alpha$, a 2. jest oczywiste. $\square$

Twierdzenie
Jeśli G jest grupą skończoną rzędu n i A jest G-modułem, to mnożenie przez n jest funkcją zerową na $H^n(G, A)$ dla $n \geqslant 1$.
W szczególności jeśli A jest skończony, rzędu względnie pierwszego z n, to $H^n(G, A) = 0$ dla $n \geqslant 1$.
Dowód
Weźmy wolną G-rezolwentę $\mathbb{Z}$
$$\cdots \to F_1 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$
Wtedy jest to również wolna rezolwenta w kategorii $\mathbb{Z}$-modułów (bo grupa addytywna $\mathbb{Z}G$ jest wolnym $\mathbb{Z}$-modułem), czyli jest to wolna $\{1\}$-rezolwenta.

Rozważmy następujący diagram przemienny kompleksów

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_G(A, F_0) \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \mathrm{Hom}_G(A, F_1) \arrow[r] \arrow[d, "\subseteq"] & \dots \arrow[d, "\dots"] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, F_0) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\cdot"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, F_1) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\cdot"] & \dots \arrow[d, "\dots"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(A, F_0) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_G(A, F_1) \arrow[r] & \dots ,
\end{tikzcd}$$

gdzie α jest jak w lemacie stąd faktycznie obrazem mnożenia przez α są G-homomorfizmy.
Kohomologie pierwszego i trzeciego kompleksu dają kohomologie G o współczynnikach w A, a kohomologie drugiego kompleksu dają kohomologie grupy trywialnej o współczynnikach w A.
Zinterpretujemy teraz złożenie dwóch pionowych strzałek z diagramu jako funkcję

$$\phi : \mathrm{Hom}_G(A, F_n) \to \mathrm{Hom}_G(A, F_n), \quad n \geqslant 0.$$

Dla $f \in \mathrm{Hom}_G(A, F_n)$ i $a \in A$ mamy

$$\phi(f)(a) = \sum_{g \in G} gf(g^{-1}a) = \sum_{g \in G} f(a) = nf(a) = f(na).$$

Czyli

$$H^n(\phi) : H^n(G, A) \to H^n(G, A)$$

pokrywa się z funkcją na $H^n(G, A)$ indukowaną przez mnożenie przez n w A. Ponieważ funktor

$$H^n(G, \cdot) : G\mathbf{-moduły} \ \to \ G\mathbf{-moduły}$$

jest addytywny, to ta funkcja jest po prostu mnożeniem przez n w $H^n(G, A)$.
Z drugiej strony funkcja ta jest złożeniem pewnych funkcji

$$H^n(G, A) \to H^n(\{1\}, A) \to H^n(G, A).$$

Ale $H^n(\{1\}, A) = 0$ dla $n \geqslant 1$ (bo $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0$ jest również $\mathbb{Z}$-rezolwentą $\mathbb{Z}$), stąd mnożenie przez n jest funkcją zerową na $H^n(G, A)$ dla $n \geqslant 1$.
Jeśli A jest rzędu skończonego względnie pierwszego z n, to mnożenie przez n na A jest automorfizmem (z opisu skończonych grup abelowych). Stąd indukowana przez to mnożenie funkcja na $H^n(G, A)$ jest również automorfizmem, czyli $H^n(G, A) = 0$ dla $n \geqslant 1$. $\square$

Wniosek 1
Załóżmy, że E jest skończoną grupą i $|E| = mn$, gdzie m i n są względnie pierwsze. Jeśli E zawiera przemienną podgrupę normalną A rzędu n. Wtedy E zawiera podgrupę rzędu m i dowolne dwie takie podgrupy są sprzężone poprzez automorfizm wewnętrzny pochodzący od elementu z A.
Dowód
Niech $G = E$ i mamy rozszerzenie

$$(*) \quad 0 \longrightarrow A \longrightarrow E \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 1\ .$$

Z poprzedniego twierdzenia $H^2(G,A) = 0$, stąd powyższe rozszerzenie się rozszczepia (z odpowiedniości pomiędzy równoważnymi klasami rozszerzeń a $H^2(G,A)$) poprzez $\phi : G \to E$. Stąd $\phi(G)$ jest podgrupą rzędu m w E.
Jeśli H jest inną podgrupą rzędu m w E, to $\psi|_H$ jest izomorfizmem pomiędzy H i G, bo $\ker(\psi|_H) = H \cap A$, czyli rząd $\ker(\psi|_H)$ dzieli n i m, stąd $\ker(\psi|_H)$ jest trywialne.
Niech teraz $\phi_H := (\psi|_H)^{-1}$, czyli ϕ_H jest również rozszczepieniem $(*)$.
Korzystając ponownie z poprzedniego twierdzenie dostajemy $H^1(G,A) = 0$.
Z interpretacji $H^1(G,A)$ mamy, że ϕ_H i ϕ są sprzężone poprzez element z A, tzn. istnieje $a \in A$ takie, że dla każdego $g \in G$ mamy $\phi(g) = a^{-1}\phi_H(g)a$.
Stąd $\phi(G) = a^{-1}Ha$. $\square$

Uwaga
Wniosek jest również prawdziwy dla dowolnej A (tzn. niekoniecznie przemiennej).

Wiemy, że $H^2(G,\cdot)$ jest funktorem z kategorii G-modułów w siebie. Zinterpretujemy go teraz na rozszerzeniach G przez A.
Weźmy homomorfizm G-modułów $f : A \to A'$ i rozszerzenie

$$0 \to A \to E \to G \to 1.$$

Jeśli teraz $E' := E *_A A'$ jest iloczynem wolnym grup (w języku teorii kategorii E' jest koproduktem włóknistym w kategorii grup) nad A, to mamy $E'/A' \cong E/A$ i stąd homomorfizm G-modułów $E' \to G$ taki, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

Łatwo udowodnić następujący
Fakt
Obrazem górnego rozszerzenia w diagramie poprzez funkcję indukowaną przez α jest dolne rozszerzenie w diagramie.

Wniosek 2
Niech E będzie grupą i C jej centralną podgrupą skończonego indeksu n. Wtedy istnieje homomorfizm $E \to C$ taki,że jego obcięcie do C jest mnożeniem przez n.
Dowód
Niech $G = E$. Rozważmy rozszerzenie

$$(*) \quad 0 \longrightarrow C \longrightarrow E \xrightarrow{\psi} G \longrightarrow 1 \; .$$

Z twierdzenia, mnożenie przez n jest zerowe na $H^2(G,C)$, stąd mnożenie przez n na C przenosi rozszerzenie $(*)$ na rozszerzenie trywialne.
Z powyższego faktu następujący diagram, jest przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & E & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle n\cdot} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_G} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \; . \end{array}$$

Naszym odwzorowaniem jest złozenie $E \to C \times G$ z rzutowaniem na C. $\square$

Wniosek 3
Jeśli E jest skończenie generowaną grupą, C jest jej centrum i $[E,E]$ jest komutantem E, to indeks C jest skończony wtedy i tylko wtedy, gdy $[E,E]$ jest skończony.
Dowód
$\Longrightarrow$ Niech $[E:C] = n$. Z teorii grup jakoś wynika, że C jest też skończenie generowana. Z wniosku 2 mamy homomorfizm $E \to C$ ze skończonym jądrem (bo n-torsja jest skończona dla skończenie generowanej grupy abelowej). C jest przemienna, stąd $[G,G] \subseteq \ker E \to C$, czyli $[E,E]$ jest skończona.
$\Longleftarrow$ Niech $E = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$. Wtedy $C = \bigcap C(g_i)$, gdzie $C(g_i)$ jest centralizatorem g_i. Stąd wystarczy pokazać, że indeks każdego $C(g_i)$ jest skończony. Ale $E/C(g_i)$ (zbiór warstw) jest w bijekcji z g_i^E (klasa sprzężoności g_i) i g_i^E wkłada się w $[E,E]$ – skończony. $\square$

Wniosek 4
Jeśli grupa E zawiera nieskończoną cykliczną, centralną podgrupę skończonego indeksu C, to $E \cong \mathbb{Z} \ltimes F$, gdzie F jest pewną grupą skończoną.
Dowód
Niech $[E : C] = n$. Wtedy z wniosku 2 mamy homomorfizm $\phi : E \to C$ taki, że $\ker(\phi) \cap C$ jest n-torsją w C, stąd $\ker(\phi) \cap C$ jest trywialne i $\ker(\phi)$ jest skończone. Stąd $\mathrm{im}(\phi)$ jest nieskończony i dostajemy epimorfizm $E \to \mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ jest grupą wolną więc ten epimorfizm się rozszczepia.