ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 12

Kohomologie snopów

Zajmiemy się najpierw odpowiedniością pomiędzy wiązkami i pewnymi snopami. Niech X będzie przestrzenią topologiczną.

Definicja

(*rzeczywistą, topologiczną*) *Wiązką* (*wektorową*) nad X nazywamy funkcję ciągła $\pi : E \to X$ taką, że istnieje otwarte pokrycie $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, istnieje n i istnieją homeomorfizmy $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ takie, że

1. Następujący diagram jest przemienny
$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_U} \\ U & \xrightarrow{\mathrm{id}_U} & U \end{array}$$
(mówimy, że wiązka *trywializuje* się nad pokryciem $(U_i)_{i\in I}$)

2. Dla $i_1, \dots, i_k \in I$, niech $U_{i_1\dots i_k} := U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}$. Dla $i, j \in I$, niech $\bar{\phi}_{ji}$ oznacza następujące złożenie
$$U_{ij} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{(\phi_i|_{U_{ij}})^{-1}} \pi^{-1}(U_{ij}) \xrightarrow{\phi_j|_{U_{ij}}} U_{ij} \times \mathbb{R}^n \ .$$
Wtedy dla każdego $x \in U_{ij}$ mamy $\bar{\phi}_{ji}(x, v) = (x, \bar{\phi}^x_{ji}(v))$ i żądamy żeby $\bar{\phi}^x_{ji}$ była liniowa.

Z warunku 2 dostajemy *funkcje przejścia*
$$\phi_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_{ji}(x) = \bar{\phi}^x_{ji},$$
które są ciągłe (bo jak ustalimy wektor bazy standardowej e_i, to funkcja $x \mapsto \bar{\phi}_{ji}(x, e_i)$ jest ciągła) i spełniają *warunek kocyklu*
$$\forall i, j, k \in I \ \ \forall x \in U_{ijk} \quad \phi_{kj}(x)\phi_{ji}(x) = \phi_{ki}(x).$$
Łatwo udowodnić następujący

Fakt

Dla każdego pokrycia otwartego $(U_i)_{i\in I}$ wraz z układem funkcji ciągłych $(\phi_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))_{i,j\in I}$ spełniających warunek kocyklu, istnieje wiązka

$\pi : E \to X$, która trywializuje się nad pokryciem $(U_i)_{i\in I}$ i dla której funkcje przejścia, to funkcje ϕ_{ji}.

Jeśli założymy, że X jest rozmaitością różniczkową (zespoloną, algebraiczną), to dostajemy definicje wiązki gładkiej (zespolonej, algebraicznej) żądając żeby ϕ_i były gładkie (holomorficzne, regularne).
Wtedy dostajemy odpowiednik faktu, musimy tylko dodatkowo założyć, że funkcje ϕ_{ji} są gładkie (holomorficzne, regularne).

Przykłady

1. Wiązka trywialna $E = X \times \mathbb{R}^n$, π jest rzutowaniem, funkcje przejścia to jedna stalą funkcja w macierz identycznościową.

2. Niech X będzie rozmaitością gładką. Wtedy istnieje pokrycie $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ i homeomorfizmy $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^n$, takie że dla $i, j \in I$ złożenie α_{ji}
$$\alpha_i(U_{ij}) \xrightarrow{(\alpha_i|_{U_{ij}})^{-1}} U_{ij} \xrightarrow{\alpha_j|_{U_{ij}}} \alpha_j(U_{ij}) \ .$$
jest gładkie.
Definiujemy
$$\phi_{ji} : U_{ij} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_{ji}(x) = \alpha'_{ji}(\alpha_i(x)).$$
Wtedy ϕ_{ji} jest gładka (bo α_{ji} była gładka) i warunek kocyklu odpowiada twierdzeniu o pochodnej funkcji złożonej.
Stąd dostajemy wiązkę gładką, jest to wiązka styczna.

Weźmy teraz wiązkę topologiczną $\pi : E \to X$. Stowarzyszymy z nią snop (na razie grup abelowych) $\mathcal{E}$. Dla $U \subseteq X$ otwartego definiujemy
$$\mathcal{E}(U) := \{s : U \to \pi^{-1}(U) \mid s \text{ jest ciągła i } \pi s = \mathrm{id}_U\}.$$
Czyli jeśli dla $C \subset X$ oznaczymy $\pi^{-1}(C)$ przez E_C (dla $x \in X$, piszemy E_x), to $s : U \to E_U$ i dla każdego $x \in U$ mamy $s(x) \in E_x$.
Zauważmy, że każdy E_x ma strukturę przestrzeni liniowej zadaną przez ϕ_i dla $x \in U_i$. Z warunku 2., ta struktura przestrzeni liniowej nie zależy od i.
Stąd dla $x \in U$, $r \in \mathbb{R}$, $s, s' \in \mathcal{E}(U)$ możemy zdefiniować $rs(x)$ i $s(x) + s'(x)$.
Ponadto, jeśli $f \in \mathcal{C}(U)$ ($\mathcal{C}$ to snop funkcji ciągłych), to $fs \in \mathcal{E}(U)$, czyli dla każdego U, $\mathcal{E}(U)$ jest $\mathcal{C}(U)$-modułem. Również funkcje obcięcia $\mathcal{E}(U) \to \mathcal{E}(U')$ dla $U' \subset U$ są homomorfizmami $\mathcal{C}(U')$-modułów ($\mathcal{E}(U)$ jest $\mathcal{C}(U')$-modułem poprzez $\mathcal{C}(U) \to \mathcal{C}(U')$).

Definicja
$(X, \mathcal{R})$ jest *przestrzenią opierścienioną*(?) (ringed space), gdy $\mathcal{R}$ jest snopem pierścieni (przemiennych z 1) na X.
Dla przestrzeni opierścienionej $(X, \mathcal{R})$, snop $\mathcal{F}$ jest snopem $\mathcal{R}$-modułów, gdy dla każdego otwartego $U \subseteq X$, $\mathcal{F}(U)$ jest $\mathcal{R}(U)$-modułem i dla $U' \subseteq U$ funkcje obcięcia $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U')$ są homomorfizmami $\mathcal{R}(U')$-modułów.

Definiujemy kategorię wiązek nad X – $\mathbf{Vect}_X$ definiując morfizmy jako funkcje ciągłe (gładkie dla wiązek gładkich, itd.) zachowujące rzutowania.
Wtedy łatwo pokazać, że $E \to \mathcal{E}$ daje funktor z $\mathbf{Vect}_X$ w $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}_X}}$ – kategorię snopów $\mathcal{C}_X$-moduółow. Podobnie dla wiązek gładkich mamy funktor w $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}^\infty_X}}$ dla analitycznych w $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{C}^{\mathrm{an}}_X}}$ i dla algebraicznych w $\mathbf{Sh}_{\mathbf{Mod}_{\mathcal{O}_X}}$.

Na snopach $\mathcal{R}$-modułów możemy wykonywać wszystkie operacje jak na przestrzeniach wektorowych, np. $\oplus, \otimes, \bigwedge, ^*$. Jeśli wychodzi tylko presnop, to się go usnapia.
Dla podzbioru otwartego $U \subseteq X$ i snopa $\mathcal{F}$ na X mamy naturalne *obcięcie* $\mathcal{F}$ do U, oznaczane $\mathcal{F}|_U$.
Snop $\mathcal{R}$-modułów $\mathcal{F}$ nazywamy *wolnym*, $\mathcal{F}$ jest izomorficzny z $\mathcal{R}^{\oplus n}$ i *lokalnie wolnym*, gdy istnieje pokrycie $X = \bigcup_{i\in I} U_i$, że dla każdego $i \in I$, $\mathcal{F}|_{U_i}$ jest wolny.

Fakt
Kategoria wiązek nad X jest równoważna kategorii lokalnie wolnych snopów $\mathcal{C}_X$-modułów. Podobnie dla wiązek gładkich, analitycznych i algebraicznych (zastępując $\mathcal{C}_X$ przez odpowiednio $\mathcal{C}^\infty_X$, $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}_X$, $\mathcal{O}_X$).

Dla rozmaitości gładkiej X, definiujemy Ω^i_X jako $\bigwedge^i(\mathcal{T}^*)$, gdzie $\mathcal{T}$ jest snopem pochodzącym od wiązki stycznej.
Dla $f \in \mathcal{C}^\infty_X(U)$ mamy $df \in \Omega^1_X(U)$ takie, że dla pola wektorowego $X \in \mathcal{E}(U)$ mamy $df(X) := X(f)$. Dla $\omega \in \Omega^i_X(U), \omega' \in \Omega^{i'}_X(U)$ mamy $\omega\wedge\omega' \in \Omega^{i+i'}_X(U)$ pochodzące z iloczynu tensorowego.
Dla k-formy na $\mathbb{R}^n$ $f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ definiujemy formę

$$d_i(f dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

i przedłużamy liniowo na wszystkie k-formy.
Mamy dla dowolnych form

$$d_{i+i'}(\omega \wedge \omega') = \omega d_{i'}(\omega') + (-1)^i d_i(\omega)\omega'.$$

Stąd dla $r \in \mathbb{R}$ mamy $d_i(r\omega) = rd_i(\omega)$.
Odwzorowanie jest niezmiennicze na dyfeomorfizmy stąd zadaje morfizm snopów $\mathbb{R}_X$-modułów $d_i : \Omega_X^i \to \Omega_X^{i+1}$ i mamy również

Twierdzenie
Dla n-wymiarowej rozmaitości gładkiej X następujący ciąg jest acykliczny

$$0 \to \mathbb{R}_X \to \mathcal{C}_X^\infty \to \Omega_X^1 \to \ldots \to \Omega_X^n \to 0.$$

Kohomologie kompleksu

$$0 \to \Gamma(\mathcal{C}_X^\infty) \to \Gamma(\Omega_X^1) \to \ldots \to \Gamma(\Omega_X^n) \to 0.$$

zwą się *kohomologiami de-Rhama* X (Γ to funktor cięć globalnych, $\Gamma(\mathcal{F}) := \mathcal{F}(X)$).

Dla każdego snopa $\mathcal{F}$ chcemy żeby $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ (jak dla snopów funkcji). Dlatego dla grupy abelowej A definiujemy snop lokalnie stały A_X. Dla otwartego $U \subseteq X$,

$$A_X(U) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, A),$$

gdzie A ma topologie dyskretną.

Fakt
Dla dowolnej przestrzeni opierścienionej $(X, \mathcal{R})$ w kategorii snopów $\mathcal{R}$-modułów istnieje dostatecznie dużo obiektów injektywnych.
Dowód
Niech $\mathcal{F}$ będzie snopem $\mathcal{R}$-modułów. Dla każdego $x \in X$ mamy źdźbło $\mathcal{F}_x$, które jest $\mathcal{R}_x$-modułem.
Wiemy, że w kategorii $\mathcal{R}_x$-modułów istnieje dostatecznie dużo obiektów injektywnych. Stąd dla każdego $x \in X$ istnieje $\mathcal{R}_x$-moduł $I(x)$ i zanurzenie $\mathcal{R}_x$-modułów $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I(x)$.
Definiujemy snop $\mathcal{I}$:

$$\text{dla } U \subseteq X \text{ otwartego,} \qquad \mathcal{I}(U) := \prod_{x \in U} I(x).$$

Łatwo zauważyć, że $\mathcal{I}_x = I(x)$.
Claim
Dla snopa $\mathcal{R}$-modułów $\mathcal{G}$ mamy bijekcję

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{G}, \mathcal{I}) \ni f \mapsto (f_x : \mathcal{G}_x \to I(x))_{x \in X} \in \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{G}_x, I(x)).$$

Dowód Claimu
Z ćwiczeń powyższe odwzorowanie jest injecją. Weźmy teraz dowolny ciąg $(f_x) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}_x}(\mathcal{G}_x, I(x))$. Definiujemy

$$f : \mathcal{G} \to \mathcal{I}, \quad \text{dla } U \subseteq X \text{ otwartego } \ f(s) = (f_x(s_x))_{x \in U} \in \prod_{x \in U} I(x) = I(U).$$

Wtedy $f \mapsto (f_x)$.
Weźmy teraz monomorfizm snopów $f : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{H}$ i inny morfizm $g : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{I}$. $\mathcal{I}$ jest injektywny, gdy f przedłuża się do $h : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$ takiego, że $hf = g$.
Z injektywności $\mathcal{R}_x$-modułów $I(x)$ dostajemy kolekcję $(h_x : \mathcal{H}_x \to \mathcal{I}_x)_{x \in X}$ takich, że $h_x f_x = g_x$. Z Claimu mamy $h : \mathcal{H} \to \mathcal{I}$, który przechodzi na (h_x) w "odwzorowaniu źdźbeł". Ponownie z ćwiczeń $hf = g$. $\square$

Definicja
Dla snopa $\mathcal{F}$, jego grupa n-tych kohomologii to:

$$H^n(X, \mathcal{F}) := R^n \Gamma(\mathcal{F})$$

dla Γ – funktora cięć globalnych.

Niełatwo jednak znaleźć naturalne przykłady snopów injektywnych, dlatego ich istnienie daje nam tylko istnienie kohomologii snopów, jednak nie sposób ich obliczenia.
Chcemy liczyć kohomologie za pomocą większej klasy snopów.

Definicja
Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie addytywnym funktorem lewo-dokładnym pomiędzy dwiema kategoriami abelowymi. Załóżmy, że $\mathcal{A}$ ma dostatecznie wiele obiektów injektywnych. Wtedy obiekt $A \in \mathcal{A}$ nazywamy *$\mathcal{F}$-acyklicznym*, gdy dla $n \geqslant 0$ mamy $R^n \mathcal{F}(X) = 0$.

Twierdzenie (ćwiczenia)
Funktory pochodne można liczyć z rezolwent acyklicznych.
Tzn. dla $\mathcal{F}$ jak wyżej, $X \in \mathcal{A}$ i rezolwenty $\mathcal{F}$-acyklicznej

$$0 \to X \to A_0 \to A_1 \to \dots,$$

$R^n \mathcal{F}(A)$, to n-te kohomologie kompleksu

$$0 \to F(A_0) \to F(A_1) \to \dots \quad .$$

Definicja
Dla snopa $\mathcal{F}$ i dowolnego podzbioru $A \subseteq X$, definiujemy

$$\mathcal{F}(A) := \varinjlim_{A \subseteq U} \mathcal{F}(U).$$

Wtedy dla $A \subseteq B \subseteq X$ mamy odwzorowanie obcięcia $\mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A)$.
Z twierdzenia Tietza, dla X – regularnej i A domkniętego, mamy $\mathcal{C}_X(A) = \mathcal{C}_A(A)$.

Definicja
Snop $\mathcal{F}$ nazywamy *miękkim*, gdy dla każdego podzbioru domkniętego $A \subseteq X$ funkcja obcięcia $\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(A)$ jest "na".

Na następnym wykładzie pokażemy:

Twierdzenie 1
Każdy snop miękki jest Γ-acykliczny.

Twierdzenie 2
Jeśli X jest gładka, to każdy snop $\mathcal{C}^{\infty}_X$-modułów jest miękki.

Wniosek
Jeśli X jest gładka, to

$$H^n(X, \mathbb{R}_X) \cong H^n_{DR}(X).$$