ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 2

Morfizmy funktorów

Przykład Niech $* : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K^{\mathrm{op}}$ będzie funktorem przestrzeni dualnej

$$V^* = h^K(V) = \hom_{\mathbf{Vect}_K}(V, K).$$

Dla każdej przestrzeni V, mamy "naturalne" odwzorowanie

$$V \ni v \mapsto V f_v^{**}, \in f_v(g) = g(v).$$

"Naturalność" polega na tym, że przekształcenie to nie zależy od V, jest to przekształcenie pomiędzy funktorami:

$$\mathrm{id} : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K, \quad ** : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K.$$

Definicja
Niech $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami. ψ jest *morfizmem* lub *naturalnym przekształceniem* pomiędzy F i G (oznaczenie $\psi : F \to G$), gdy

$$\psi = (\psi_X : F(X) \to G(X))_{X \in \mathcal{C}}$$

taka, że dla każdego $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\psi_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\psi_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y) \end{tikzcd} ,$$

tzn. $\psi_Y F(f) = G(f)\psi_X$.

Przykład 1

$$\mathrm{id} : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K, \quad ** : \mathbf{Vect}_K \to \mathbf{Vect}_K.$$
$$\varphi : \mathrm{id} \to **, \quad \varphi_V(v)(v^*) = v^*(v).$$

Weźmy dowolne $A : V \to W$ liniowe. Mamy pokazać, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\varphi_V"'] & W \arrow[d, "\varphi_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "A^{**}"'] & W^{**} \end{tikzcd} .$$

Najpierw zinterpretujemy A^* i A^{**}. Dla $w^* \in W^*, v^{**} \in V^{**}$:

$$A^*(w^*) = w^* \circ A, \quad A^{**}(v^{**}) = v^{**} \circ A^*.$$

Weźmy dowolne $v \in V$ i $w^* \in W^*$.

$$A^{**}(\varphi_V(v))(w^*) = \varphi_V(v) \circ A^*(w^*) = \varphi_V(v)(A^*(w^*)) = \varphi_V(v)(w^* \circ A) = w^* \circ A(v) = w^*(A(v)).$$

$$\varphi_W(A(v))(w^*) = w^*(A(v)).$$

Czyli

$$A^{**}(\varphi_V(v)) = \varphi_W(A(v)) \text{ i } A^{**} \circ \varphi_V = \varphi_W \circ A.$$

Przykład 2

Niech $T : \mathbf{Diff} \to \mathbf{Diff}$ będzie funktorem przestrzeni stycznej. Wtedy mamy naturalne przekształcenie (rzutowania):

$$\pi : T \to \mathrm{id}, \quad \pi_X : T(X) \to X, \quad \pi_X(x, v) = x.$$

dla $(x, v) \in T(X)$. Z geometrii różniczkowej wiemy, że dla każdej funkcji gładkiej $f : X \to Y$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} T(X) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \\ {\scriptstyle \pi_X}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_Y} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}.$$

Przykład 3

Niech X będzie rozmaitością analityczną, $\mathcal{O}_X$ snopem (grup abelowych) funkcji holomoricznych w $\mathbb{C}$ z działaniem dodawania funkcji i $\mathcal{O}_X^*$ snopem (grup abelowych) funkcji holomoricznych w $\mathbb{C}^*$ z działaniem mnożenia funkcji. Mamy naturalne przekształcenie:

$$\exp : \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X^*, \quad \exp_U(f)(x) = \exp(f(x)).$$

Jest to morfizmem snopów, bo dla każdej pary $U \subseteq V$ zbiorów otwartych w X i $f \in \mathcal{O}_X(U)$ mamy $\exp(f)|_U = \exp(f|_U)$, czyli:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(V) & \xrightarrow{f \mapsto f|_U} & \mathcal{O}_X(U) \\ {\scriptstyle \exp_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \exp_U} \\ \mathcal{O}_X^*(V) & \xrightarrow{f \mapsto f|_U} & \mathcal{O}_X^*(U) \end{array},$$

Przykład przekształcenia nienaturalnego
Weźmy przestreń liniową V i jej bazę B. Niech $(\cdot,\cdot)_B$ będzie iloczynem skalarnym na V pochodzącym od bazy B. Definiujemy

$$\phi_{V,B} : V \to V^*, \quad \phi_{V,B}(v)(w) = (v,w)_B.$$

Przekształcenie nie jest naturalne głównie dlatego, że jest pomiędzy funktorem kowariantnym (id) a kontravariantnym $(*)$. Poza tym zależy od wyboru bazy, czyli istotnie zależy od danej przestrzeni liniowej.

Definicja
Dla $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ – kategorii, $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ to kategoria funktorów z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$, gdzie morfizmami są naturalne przekształcenia funktorów.

Główne przykłady, to kategorie (pre)snopów i $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$.

Twierdzenie Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią. Wtedy:

1. Mamy funktor kontrawariantny
$$h : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Set}), \quad h(A) = h_A.$$

2. **Lemat Yonedy**
Dla każdego funktora $T : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ i $A \in \mathcal{C}$, odwzorowanie
$$\mathrm{Hom}(h_A, T) \ni \phi \mapsto \phi_A(\mathrm{id}_A) \in T(A)$$
jest bijekcją.

3. Funktor h jest wiernie pełen.

Dowód

1. Dla $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ definiujemy:
$$h(g) : h_B \to h_A, \quad h(g)_X = h^X(g) \ \text{ dla każdego } X \in \mathcal{C}.$$
Trzeba zauważyć, że dla dowolnego $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ następujący diagram jest przemienny, co jest równoważne łączności składania:
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,X) & \xrightarrow{h_B(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,Y) \\ {\scriptstyle (h(g)_X=)h^X(g)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h^Y(g)(=h(g)_Y)} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) & \xrightarrow{h_A(f)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y)\ . \end{array}$$

2. Definiujemy funkcję odwrotną do

$$\mathrm{Hom}(h_A, T) \ni \phi \mapsto \phi_A(\mathrm{id}_A) \in T(A).$$

Niech $a \in T(A)$. Definiujemy dla dowolnych $X \in \mathcal{C}$ i $f : A \to X$:

$$\bar{a} : h_A \to T, \quad \bar{a}_X : \mathrm{Hom}(A, X) \to T(X), \quad \bar{a}_X(f) = T(f)(a).$$

Musimy sprawdzić, czy $\bar{a}$ jest przekształceniem funktorów, czyli czy dla dowolnego $g : X \to Y$ następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \arrow[r, "h_A(g)"] \arrow[d, "\bar{a}_X"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \arrow[d, "\bar{a}_Y"] \\
T(X) \arrow[r, "T(g)"] & T(Y)
\end{tikzcd} .$$

Weźmy dowolny $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

$$T(g)(\bar{a}_X(f)) = T(g)(T(f)(a)) = T(gf)(a) = \bar{a}_Y(gf) = \bar{a}_Y(h_A(g)(f)).$$

Sprawdzamy,czy zdefiniowane przekształcenia pomiędzy $\mathrm{Hom}(h_a, T)$ i $T(A)$ są wzajemnie odwrotne.
Weźmy $\phi : h_A \to T$. Chcemy pokazać, że $\overline{\phi_A(\mathrm{id}_A)} = \phi$.
Weźmy dowolny $f : A \to X$. Mamy:

$$\overline{\phi_A(\mathrm{id}_A)}_X(f) = T(f)(\phi_A(\mathrm{id}_A).$$

Ale ϕ jest morfizmem funktorów, czyli następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \arrow[r, "h_A(f)"] \arrow[d, "\phi_A"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \arrow[d, "\phi_X"] \\
T(A) \arrow[r, "T(F)"] & T(X)
\end{tikzcd} .$$

Stąd:

$$T(f)(\phi_A(\mathrm{id}_A) = \phi_X(h_a(f)(\mathrm{id}_A)) = \phi_X(f \circ \mathrm{id}_A) = \phi_X(f).$$

Czyli $\overline{\phi_A(\mathrm{id}_A)} = \phi$.
Dla dowolnego $a \in T(A)$,

$$\bar{a}_A(\mathrm{id}_A) = T(\mathrm{id}_A)(a) = \mathrm{id}_{T(A)}(a) = a.$$

3. Z poprzedniego punktu (dla $T = h_B$) mamy następujące bijekcje

$$\mathrm{Hom}(B, A) = h_B(A) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(h_A, h_B).$$

Czyli wystarczy pokazać, że odpowiadają one funkcji na morfizmach indukowanej przez funktor f. Weźmy $g \in h_B(A)$ i $f : A \to X$.

$$\bar{g}_X(f) = h_B(f)(g) = fg = h^X(g)(f), \text{ stąd } \bar{g}_X = h^X(g) = h(g)_X$$

Czyli $\bar{g} = h(g)$. □

Często zanurzamy poprzez powyższy funktor kontrawariantny daną kategorię w kategorię funktorów, żeby móc przeprowadzać różne operacje, które mogą być niedozwolone w wyjściowej kategorii.

Fakt
Przekształcenie funktorów $f : F \to G$ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego obiektu X z dziedziny F i G, $f_X : F(X) \to G(X)$ jest izomorfizmem.
Dowód
$\Rightarrow$ Niech $g : G \to F$ będzie przekształceniem funktorów takim, że $gf = \mathrm{id}_F$, $fg = \mathrm{id}_G$. Wtedy dla każdego X, $g_X f_X = \mathrm{id}_{F(X)}$, $f_X g_X = \mathrm{id}_{G(X)}$.
$\Leftarrow$ Wystarczy przyjąć dla każdego X, $g_X = f_X^{-1}$. □

Przykład
Niech $\mathbf{Vect}_K^f$ oznacza kategorię skończenie-wymiarowych przestrzeni liniowych nad K i $V \in \mathbf{Vect}_K^f$.
Wtedy $\varphi : \mathrm{id} \to **$ jest izomorfizmem, bo jeśli $v \in V \setminus \{0\}$, to istnieje $v^* \in V^*$ taki, że $v^*(v) \neq 0$, czyli $\varphi_V(v)(v^*) \neq 0$ i $\varphi_V(v) \neq 0$.
Stąd φ_V jest "1-1" a ponieważ $\dim(V) = \dim(V^{**}) < \infty$ (V jest niekanonicznie izomorficzna z V^* i V^{**}!), to φ_V jest izomorfizmem.

Definicja nieużyteczna
Izomorfizm pomiędzy kategoriami $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ jest to funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dla którego istnieje funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, taki że $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ i $FG = \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Przykład
Niech **Ord** będzie pełną podkategorią **Set**, której obiektami są liczby kardynalne. Wtedy **Ord** jest izomorficzna z $\mathrm{Iso}(\mathbf{Set})$.

Definicja użyteczna
Kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ są *równoważne*, gdy istnieje funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dla którego

istnieje funktor $FG : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, taki że $G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ i $FG \cong \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$.

Przykład
$\mathbf{Vect}_K^f$ i $(\mathbf{Vect}_K^f)^{\mathrm{op}}$ są równoważne, bo $** \cong \mathrm{id}$.

Twierdzenie
$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ jest równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy F jest wiernie pełny i dla każdego $Y \in \mathcal{D}$, istnieje $X \in \mathcal{C}$, taki że $Y \cong F(X)$.
Dowód
$\Rightarrow$ Dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$ złożenia (gdzie ostatnia strzałka: l jest bijekcją i pochodzi od izomorfizmu z funktorem identycznościowym):

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GF(X),GF(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(FG(X),FG(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$$

są identycznościami, stąd F i G są wierne.
Weźmy dowolny $f : F(X) \to F(Y)$ i niech $g = l(G(f)) : X \to Y$. Wtedy

$$lGF(g) = g = lG(f).$$

Ale l jest bijekcją, czyli $GF(g) = G(f)$. Wiemy też, że G jest wierny, czyli $f = F(g)$, stąd F jest pełny.
Dla każdego $Y \in \mathcal{D}$, $F(G(Y)) \cong Y$, czyli można wziąć $X = G(Y)$.

$\Leftarrow$ Dla każdego $Y \in \mathcal{D}$ znajdujemy, $\alpha_Y : F(X) \cong Y$ (dla $Y = F(X)$ wybieramy $\alpha_Y = \mathrm{id}_Y$). Dla $f : Y \to Y'$ definiujemy:

$$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, \quad G(Y) = X, \quad G(f) = F^{-1}(\alpha_Y f \alpha_{Y'}^{-1}).$$

Sprawdzamy, że G jest funktorem. jest jasne, że F^{-1} też zachowuje złożenia.
Stąd dla $f : Y \to Y', g : Y' \to Y''$

$$G(gf) = F^{-1}(\alpha_Y g f \alpha_{Y'}^{-1}) = F^{-1}(\alpha_Y g \alpha_{Y'}^{-1} \alpha_{Y'} f \alpha_{Y''}^{-1}) = F^{-1}(\alpha_Y g \alpha_{Y'}^{-1}) F(\alpha_{Y'} f \alpha_{Y''}^{-1}) = G(g)G(f).$$

Z konstrukcji $GF = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.
Niech

$$\alpha : FG \to \mathrm{id}_{\mathcal{D}}, \quad \alpha_Y : FG(Y) \cong Y.$$

Wiemy, że dla każdego $f : Y \to Y'$, $G(f) = F^{-1}(\alpha_Y f \alpha_{Y'}^{-1})$. Stąd $FG(f) = (\alpha_Y f \alpha_{Y'}^{-1})$, czyli następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Y' \\ {\scriptstyle \alpha_Y}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \alpha_{Y'}} \\ FG(Y) & \xrightarrow{FG(f)} & FG(Y') \end{array} .$$

Czyli α jest morfizmem funktorów. α jest izomorfizmem,bo jest izomorfizmem na obiektach. $\square$

Przykład
Funktor pierścienia funkcji regularnych.
Nie istnieje naturalny odwrotny.