ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 3

Funktory reprezentowalne

Definicja
Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ jest *reprezentowalny* poprzez $A \in \mathcal{C}$, gdy F jest izomorficzny z h_A, tzn. dla każdego $B \in \mathcal{C}$ istnieje naturalna bijekcja

$$F(B) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(A, B).$$

Uwaga
Niech $\mathrm{Repr}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ oznacza pełną podkategorię $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$, której obiektami są funktory reprezentowalne.
Z lematu Yonedy wynika, że

$$\mathcal{C} \ni X \mapsto h^X \in \mathrm{Repr}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \ni X \mapsto h_X \in \mathrm{Repr}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$$

są równoważnościami.
Niech $\imath$ będzie quasi-odwrotnością do pierwszej z nich.

Przykład 1
Rozważmy funktor n-tych kohomologii o współczynnikach w grupie A jako

$$H^n_A : \mathbf{Toph}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad H^n_A(X) = H^n(X, A).$$

Funktor H^n_A jest reprezentowalny poprzez *przestrzeń Eilenberga Mac-Lane'a* $K(A, n)$, czyli dla każdej przestrzeni topologicznej X mamy naturalną bijekcję

$$H^n(X, A) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Toph}}(X, K(A, n)).$$

$K(A, n)$ jest określone z dokładnością do homotopii poprzez:

$$\pi_i(K(A, n)) = \begin{cases} A & \text{gdy } i = n \\ 0 & \text{gdy } i \neq n. \end{cases}$$

Operacją kohomologiczną θ typu (n, m, A, B) nazywamy dowolny morfizm funktorów

$$\theta : H^n_A \to H^m_B.$$

Twierdzenie
Operacje kohomologiczne typu (n, m, A, B) są w bijekcji z $H^m(K(A,n), B)$.
Dowód
Ponieważ $H^n_A = h^{K(A,n)}$, z lematu Yonedy (stosowanego do $\mathbf{Toph}^{\mathrm{op}}$) mamy następującą bijekcję:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Func}(\mathbf{Toph}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Set})}(H^n_A, H^m_B) \longleftrightarrow H^m(K(A,n), B). \qquad \square$$

Przykład 2 (pierwsza definicja produktu – reprezentowalność)
Weźmy X, Y, obiekty kategorii $\mathcal{C}$. Jeśli istnieje obiekt reprezentujący funktor:

$$F_{X,Y} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad F_{X,Y}(A) = \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(A, Y),$$

to nazywamy go *produktem* X i Y (w kategorii $\mathcal{C}$) i oznaczamy $X \times Y$.
Z lematu Yonedy produkt jest określony z dokładnością do izomorfizmu.
Mówimy, że kategoria ma produkty, jeśli dla każdej pary obiektów istnieje ich produkt.
Zauważmy, że

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \ni (X, Y) \mapsto F_{X,Y} \in \mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

jest funktorem. Stąd, jeśli $\mathcal{C}$ ma produkty, to

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \ni (X, Y) \mapsto X \times Y \in \mathcal{C}$$

jest funktorem jako kompozycja górnego funktora z quasi-odwrotnością $\imath$ (pochodzącą z lematu Yonedy).

Podobnie będziemy uzasadniać, że inne konstrukcje reprezentowalne w funktorialny sposób są funktorami.

Zbiór $\mathrm{Hom}(A, X)$ możemy rozumieć jako zbiór "A-punktów" X, który czasem oznaczamy przez $X(A)$.
Lemat Yonedy intuicyjnie mówi, że wystarczy patrzeć na (wszystkie możliwe) A-punkty.

Fakt (druga definicja produktu – własność uniwersalna)
Obiekt Z jest produktem X i Y wtedy i tylko wtedy, gdy mamy morfizmy $\pi_X : Z \to X$, $\pi_Y : Z \to Y$ takie że dla każdej pary morfizmów $f_X : Z' \to X$, $f_Y : Z' \to Y$, istnieje jedyny morfizm $f : Z' \to Z$ taki, że $f_X = f\pi_X$, $f_Y = f\pi_Y$.
Dowód

$\Longrightarrow$
Dla każdego $A \in \mathcal{C}$ mamy naturalną odpowiedniość

$$\mathrm{Hom}(A, Z) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(A, Y).$$

Wstawiając $A = Z$ otrzymujemy (π_X, π_Y) odpowiadające id_Z.
Wstawiając $A = Z'$ otrzymujemy f odpowiadające (f_X, f_Y).
Uzupełnić dowód – ćwiczenie.
$\Longleftarrow$
Oznaczmy przez F funktor $F_{X,Y}$, czyli $F(A) = \mathrm{Hom}(A, X) \times \mathrm{Hom}(A, Y)$. Z lematu Yonedy przekształcenia pomiędzy h^Z i F odpowiadają $F(Z)$. Element $(\pi_X, \pi_Y) \in F(Z)$ odpowiada izomorfizmowi funktorów – ćwiczenie. $\square$

Zwykle jednak będziemy definiować nowe pojęcia poprzez własność uniwersalną (definicja 2) a nie funktor reprezentowalny. Dzięki funktorialnej reprezentowalności dostajemy jak poprzednio, że dana konstrukcja jest funktorem.

Definicja
Koprodukt to pojęcie dualne do produktu (odwracamy wszystkie strzałki w drugiej definicji produktu). Koprodukt X, Y oznaczamy przez $X \coprod Y$.

Zauważmy, że mamy naturalne morfizmy

$$\Delta : X \to X \times X \text{ (przekątna)}$$

$$\nabla : X \coprod X \to X \text{ (koprzekątna).}$$

Dla $f : X \to Y,\ g : X \to Z$ złożenie

$$(f \times g) \circ \Delta : X \to Y \times Z$$

oznaczamy przez (f, g).

Z lematu Yonedy mamy też funktorialny izomorfizm

$$(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z),$$

czyli możemy opuszczać nawiasy i pisać $X \times Y \times Z$ (podobnie dla $\coprod$).

Przykłady

1. **Set**, **Top**, **Diff**, **An**, $\mathbf{AfVar}_K$.
   Produkt to iloczyn kartezjański, koprodukt to suma rozłączna.
   Czyli ogólnie koprodukt $X, Y \in \mathcal{C}$ reprezentuje funktor

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \ni A \mapsto \mathrm{Hom}(A, X) \coprod \mathrm{Hom}(A, Y) \in \mathbf{Set}.$$

2. $\mathbf{Alg}_R$. Produkt to iloczyn kartezjański, koprodukt to iloczyn tensorowy.

3. **Grp**. Produkt to suma prosta, koprodukt to iloczyn wolny.

4. $\mathbf{Mod}_R$. Produkt i koprodukt to suma prosta.

5. $\mathrm{Top}(X)$. Produkt to przekrój, koprodukt to suma.

Definicja
Załóżmy, że w kategoriach $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ istnieją produkty. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zachowuje produkt, gdy następujące funktory są izomorficzne:

$$(X, Y) \mapsto F(X) \times F(Y), \quad (X, Y) \mapsto F(X \times Y).$$

Fakt
Funktory reprezentowalne zachowują produkt i obiekt końcowy.
Dowód
Wprost z pierwszej definicji produktu i z definicji obiektu końcowego. □

Aksjomaty grupy G można wyrazić poprzez diagramy przemienne używające działania $m : G \times G \to G$, funkcji elementu odwrotnego $i : G \to G$ oraz funkcji stałej w element neutralny $e : G \to G$, którą możemy rozumieć jako zlożenie funkcji w element końcowy (singleton) z zanurzeniem elementu końcowego w G.
Jeśli $*$ jest obiektem końcowym i $f : * \to X$ morfizmem, to złożenie f z jedynym morfizmem $X \to *$ oznaczamy też przez f.
Definicja
Załóżmy, że kategoria $\mathcal{C}$ ma obiekt końcowy, oznaczony $*$. *Grupą w kategorii* $\mathcal{C}$ nazywamy czwórkę (G, m, i, e)

$$G \in \mathcal{C}, \quad m : G \times G \to G, \quad i : G \to G, \quad e : * \to G$$

taką, że następujące diagramy są przemienne:

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "m\times\mathrm{id}_G"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times m"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G\times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \quad \text{(łączność)}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "(e,\mathrm{id}_G)"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G"'] & G\times G \arrow[d, "m"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{id}_G"] & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "\mathrm{id}_G"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G,e)"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\ G\times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \quad \text{(element neutralny)}$$

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[d, "\mathrm{id}_G\times i"'] & G \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "e"'] & G\times G \arrow[d, "i\times\mathrm{id}_G"] \\ G\times G \arrow[r, "m"] & G & G\times G \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd} \quad \text{(elementy odwrotne).}$$

Definicja *kogrupy w kategorii* jest dualna (ćwiczenie – narysować diagramy!). *Morfizmem grup w kategorii* $\mathcal{C}$ (G, m, i, s) i (G', m', i', e') nazywamy morfizm $f : G \to G'$ zachowujący (m, i, s), (m', i', s'), czyli np. następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m"'] & G'\times G' \arrow[d, "m'"] \\ G \arrow[r, "f"] & G' \end{tikzcd} .$$

Grupy i kogrupy w $\mathcal{C}$ tworzą (zwykle niepełne) podkategorie $\mathcal{C}$, które będziemy oznaczać $\mathbf{Grp}_{\mathcal{C}}$ i $\mathbf{Cogrp}_{\mathcal{C}}$.

Przykłady

1. Grupy w **Set**, to grupy.

2. Grupy w **Toph**, to tzw. H-grupy.

3. $(S^n, 1)$ jest kogrupą w $\mathbf{Toph}_*$.
Obiektem początkowym w $\mathbf{Toph}_*$ jest $*$ (singleton).
Koproduktem (X, x) i (Y, y) jest $X \vee Y = X \times \{y\} \cup \{x\} \times Y$.
Odwzorowaniem komnożenia $S^n \to S^n \vee S^n$ jest "ściągnięcie równika".
Ćwiczenie – sprawdzić, że dostajemy kogrupę w $\mathbf{Toph}_*$ (tzw. H-kogrupę).

4. Grupy w **Top**, to grupy topologiczne.

5. Grupy w **Diff**, to grupy Liego.

6. Grupy w **An**, to zespolone grupy Liego.

7. $\mathbf{Var}_K$, to kategoria rozmaitości algebraicznych nad K (niekoniecznie afinicznych, np. rzutowych). Grupy w $\mathbf{Var}_K$, to grupy algebraiczne nad K.
   Grupy w $\mathbf{AfVar}_K$, to afiniczne grupy algebraiczne nad K.
   Twierdzenie Włożenie podkategorii grup liniowych w afiniczne grupy algebraiczne jest równoważnością kategorii.

8. Grupy w $\mathrm{Def}(M)$, to grupy definiowalne.
   Twierdzenie Włożenie podkategorii grup algebraicznych w grupy definiowalne w K jest równoważnością kategorii.

9. Grupy w **Grp**, to grupy abelowe (ćwiczenie – uzasadnić).

10. Kogrupy w $\mathbf{Alg}_K$, to algebry Hopfa.