ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 4

Fakt
X jest grupą w kategorii $\mathcal{C}$ (kogrupą) wtedy i tylko wtedy, gdy h^X (h_X) jest funktorem w kategorię **Grp**.
Dowód
$\Longrightarrow$ "Mnożenie po współrzędnych"
Dla każdego $A \in \mathcal{C}$,

$$(h^X(A), h_A(m), h_A(i), h_A(e))$$

jest grupą (bo h_A zachowuje produkty).
Przenoszenie przez h^X morfizmów na homomorfizmy grup wynika z łączności składania, tak samo jak w dowodzie lematu Yonedy.
$\Longleftarrow$ Lemat Yonedy
Dla każdego $A \in \mathcal{C}$, niech m_A oznacza działanie w grupowe w $h^X(A)$.
Ponieważ h^X przenosi morfizmy na homomorfizmy grup,

$$m = (m_A)_{A \in \mathcal{A}} : h^{X \times X} \to h^X$$

jest przekształceniem funktorów.
Z lematu Yonedy, dostajemy $m : X \times X \to X$ i pozostałe funkcje z definicji grupy w kategorii. Ponownie z lematu Yonedy spełniają one odpowiednie aksjomaty. $\square$

Wniosek
Dla $n \geqslant 1$, $\pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Set}$ jest funktorem w **Grp**.
Dowód
π_n jest złożeniem funktora zapominania z funktorem kowariantnym reprezentowalnym przez S^n, która jest kogrupą w $\mathbf{Toph}_*$. $\square$

Fakt Jeśli funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zachowuje produkty i obiekty końcowe, to jest też funktorem z $\mathbf{Grp}_{\mathcal{C}}$ do $\mathbf{Grp}_{\mathcal{D}}$.
Dowód Wystarczy nałożyć F na wszystkie diagramy definiujące grupę w kategorii i morfizmy grup w kategorii. $\square$

Wniosek 1
Każdy funktor reprezentowalny jest też funktorem z $\mathbf{Grp}_{\mathcal{C}}$ do **Grp**.
Dowód
Wiemy że funktory reprezentowalne zachowują produkty i obiekt końcowy. $\square$

Wniosek 2
Jeśli X jest H-grupą (w szczególności grupą topologiczną), to dla $n \geqslant 1$ $\pi_n(X)$ jest abelowa.
Dowód
π_n jest reprezentowalny, czyli zachowuje produkty i obiekty końcowe jako funktor (przed złożeniem z funktorem zapominania) z $\mathbf{Toph}_*$ do $\mathbf{Set}$.
Ale w dowolnej kategorii $\mathcal{C}$ (ćwiczenie) produkty w kategorii grup w $\mathcal{C}$, są to produkty w $\mathcal{C}$ i obiekt końcowy jest też ten sam. Stąd π_n zachowuje produkty i obiekt końcowy jako funktor z $\mathbf{Toph}_*$ do $\mathbf{Grp}$. Z faktu:

$$\pi_n : \mathbf{Grp}_{\mathbf{Toph}_*} \to \mathbf{Grp}_{\mathbf{Grp}} = \mathbf{Ab}.$$

(grupą w kategorii grup jest grupa abelowa!). Czyli $\pi_n(X)$ jest abelowa. $\square$

Funktory dołączone

Niech R będzie pierścieniem, X dowolnym zbiorem i $R[X]$ pierścieniem wielomianów, gdzie zmienne pochodzą ze zbioru X. Wtedy mamy funktor

$$F(X) = R[X], \quad F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Alg}_R.$$

Niech $G : \mathbf{Alg}_R \to \mathbf{Set}$ będzie funktorem zapominania.
Wtedy dla każdej R-algebry S i zbioru X mamy bijekcję

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(R[X], S) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, S), \qquad \phi \mapsto \phi|X,$$

która jest naturalna względem S i X (bo obcinanie funkcji jest przemienne ze składaniem funkcji).
Czyli następujące funktory są izomorficzne

$$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Alg}_R \ni (X, S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_R}(F(X), S) \in \mathbf{Set}$$

$$\mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Alg}_R \ni (X, S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, G(S)) \in \mathbf{Set}.$$

Definicja
Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ będą funktorami. F jest *lewym dołączonym* do G (inaczej mówiąc G jest *prawym dołączonym* do F), gdy następujące funktory są izomorficzne

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \in \mathbf{Set}$$

$$\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \ni (X, Y) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \in \mathbf{Set}.$$

Przykłady (lewy dołączony do funktora zapominania G)

1. $G : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, $F(X) = F_X$ – funktor grupy wolnej.
2. $G : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, $F(H) = H^{\mathrm{ab}} = H/[H,H]$ – funktor abelianizacji.
3. S–R-algebra, $G : \mathbf{Mod}_S \to \mathbf{Mod}_R$, $F(M) = M \otimes R_S$ – funktor rozszerzenia skalarów.
4. $G : \mathbf{Ciała} \to \mathbf{Pierścienie\ Całkowite}$, $G(R) = R_0$ – ciało ułamków.

Inne przykłady

1. Niech dla $(X,x) \in \mathbf{Top}_*$

$$\Omega(X,x) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}_*}((S^1,*),(X,x))$$

(pętle zaczepione w x) z topologią zwarto-otwartą.

$$\Sigma(X,x) = X \times [0,1]/(X \times \{0,1\} \cup \{x\} \times [0,1])$$

(punkt wyróżniony dla $\Omega(X,x)$ to pętla stała, dla $\Sigma(X,x)$, to klasa punktu $(x,0)$).
Σ jest lewym dołączonym do Ω, gdzie Σ i Ω rozważamy jako funktory z $\mathbf{Toph}_*$ do $\mathbf{Toph}_*$ (ćwiczenie).

2. Dla pierścienia przemiennego R i R-modułu M, funktor

$$\mathbf{Mod}_R \ni N \mapsto M \otimes_R N \in \mathbf{Mod}_R$$

jest lewym dołączonym (ćwiczenie) do

$$\mathbf{Mod}_R \ni N \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Mod}_R}(M,N) \in \mathbf{Mod}_R.$$

Fakt
Dla $n \geqslant 2$, $\pi_n : \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Ab}$.

Dowód
Dla $(X,x) \in \mathbf{Top}_*$ i $n \geqslant 2$, trzeba pokazać, że $\pi_n(X,x)$ jest grupą abelową.

$$\pi_n(X,x) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Toph}_*}((S^n,*),(X,x)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Toph}_*}((SS^{n-1},*),(X,x)) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Toph}_*}((S^{n-1},*),\Omega(X,x)) = \pi_{n-1}(\Omega(X,x)).$$

Ale $\Omega(X,x)$ jest H-grupą (ćwiczenie) i $n-1 \geqslant 1$, czyli $\pi_{n-1}(\Omega(X,x))$ jest abelowa. $\square$

Twierdzenie
Niech $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będzie funktorem. Załóżmy, że dla każdego $Y \in \mathcal{D}$ istnieje $X_Y \in \mathcal{C}$, który reprezentuje funktor $h^Y F$, tzn. funktor

$$\mathcal{C} \ni X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y) \in \mathbf{Set}.$$

Wtedy istnieje jedyny funktor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ taki, że:

- Dla każdego $Y \in \mathcal{D}$, $G(Y) = X_Y$
- G jest dołączony z prawej do F.

Przechodząc do kategorii przeciwnych dostajemy twierdzenie dualne, w którym startujemy od G i dostajemy funktor dołączony z lewej F.

Dowód
Dla każdego $Y \in \mathcal{D}$ istnieje izomorfizm funktorów $\alpha^Y : h^{X_Y} \to h^Y F$, czyli dla każdego $X \in \mathcal{C}$ mamy naturalną względem X bijekcję

$$\alpha^Y_X : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_Y) \longleftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y).$$

Weźmy $X = X_Y$ i niech

$$\sigma_Y := \alpha^Y_{X_Y}(\mathrm{id}_{X_Y}), \quad \sigma_Y : F(X_Y) \to Y.$$

Niech $f : X \to X_Y$. Wtedy następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_Y, X_Y) \arrow[r, "\alpha^Y_{X_Y}"] \arrow[d, "h^{X_Y}(f)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_Y),Y) \arrow[d, "h^Y(F(f))"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X_Y) \arrow[r, "\alpha^Y_X"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X),Y)
\end{tikzcd}.$$

W szczególności (biorąc $\mathrm{id}_{X_Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_Y, X_Y)$) dostajemy

$$\alpha^Y_X(f) = \sigma_Y \circ F(f). \tag{1}$$

Weźmy teraz $v : Y \to Y'$. Szukamy $G(v) : X_Y \to X_{Y'}$. Zauważmy, że

$$v \circ \sigma_Y : F(X_Y) \to Y', \quad \alpha^{Y'}_{X_Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_Y, X_{Y'}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_Y), Y').$$

Definiujemy

$$\widetilde{v} = (\alpha^{Y'}_{X_Y})^{-1}(v \circ \sigma_Y), \tag{2}$$

($\widetilde{v}$ będzie naszym $G(v)$).

CLAIM
Morfizm $\widetilde{v} : X_Y \to X_{Y'}$ jest jedyny taki, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
F(X_Y) \arrow[r, "F(\widetilde{v})"] \arrow[d, "\sigma_Y"'] & F(X_{Y'}) \arrow[d, "\sigma_{Y'}"] \\
Y \arrow[r, "v"] & Y'
\end{tikzcd} .$$

Dowód Claimu

- Przemienność diagramu.

$$v \circ \sigma_Y = \alpha_{X_Y}^{Y'}(\widetilde{v}) = \sigma_{Y'} \circ F(\widetilde{v}),$$

  gdzie pierwsza równość wynika z (2) a druga z (1).

- Jedyność.
  Niech $\widetilde{u} : X_Y \to X_{Y'}$ będzie morfizmem takim, że $v \circ \sigma_Y = \sigma_Y \circ F(\widetilde{u})$.
  Wtedy

$$\widetilde{v} = (\alpha_{X_Y}^{Y'})^{-1}(v \circ \sigma_Y) = (\alpha_{X_Y}^{Y'})^{-1}(\sigma_Y \circ F(\widetilde{u})) = (\alpha_{X_Y}^{Y'})^{-1}(\alpha_{X_Y}^{Y'}(\widetilde{u})) = \widetilde{u}. \quad \square$$

Z Claimu wynika, że $\widetilde{v \circ w} = \widetilde{v} \circ \widetilde{w}$, czyli G zdefiniowany

$$G(Y) = X_Y, \quad G(v) = \widetilde{v}$$

jest funktorem.

Trzeba jeszcze sprawdzić, czy funkcja α_X^Y jest naturalna względem Y.
Weźmy $v : Y \to Y'$. Mamy sprawdzić, że następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y)) \arrow[r, "h_X(G(v))"] \arrow[d, "\alpha_X^Y"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')) \arrow[d, "\alpha_X^{Y'}"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \arrow[r, "h_{F(X)}(v)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y')
\end{tikzcd} .$$

Weźmy, $u : X \to G(X)$.

$$\alpha_X^{Y'}(G(v) \circ u) = \sigma_{Y'} \circ F(G(v) \circ u), \qquad \text{z (1)}$$

$$\sigma_{Y'} \circ F(G(v) \circ u) = \sigma_{Y'} \circ F(G(v)) \circ F(u) = v \circ \sigma_Y \circ F(u), \qquad \text{z Claimu}$$

$$v \circ \sigma_Y \circ F(u) = v \circ \alpha_X^Y(u) \qquad \text{z (1).}$$

Jedyność G wynika z jedyności w Claimie, bo każdy inny wybór $G(v)$ też musiałby wchodzić w przemienny diagram w Claimie. $\square$

Przykład
Niech K będzie ciałem. Rozważmy

$$G : \mathbf{Alg}_K \to \mathbf{Alg}_K, \quad G(R) = R[x]/(x^2)$$

(funktor liczb dualnych).
Dla dowolnej K-algebry R, ustalmy $R = K[X]/I$, dla pewnego zbioru zmiennych X i ideału I. Niech $\delta : R[X] \to R[X, X']$ ($X' = \{x' : x \in X\}$) będzie rózniczkowaniem takim,że $\delta(K) = 0$ i dla każdego $x \in X$, $\delta(x) = x'$. Definiujemy

$$R' = K[X, X']/(I, \delta(I)).$$

Wtedy R' reprezentuje funktor

$$\mathbf{Alg}_K \ni S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}_K}(S, G(R)) \in \mathbf{Set},$$

czyli $R \mapsto R'$ przedłuża się do funktora F, dołączonego z lewej do G.
Jeśli $R \cong K[V]$ (pierścień funkcji regularnych), to $F(R) \cong K[TV]$, gdzie TV jest wiązką styczną. Czyli F odpowiada funktorowi wiązki stycznej.