ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 5

Granice

Niech $(I, \leqslant)$ będzie posetem (zbiorem z częściowym porządkiem) i $\mathcal{C}$ dowolną kategorią. Dla każdego $i \in I$ niech będzie dany obiekt $X_i \in \mathcal{C}$ i dla każdej pary uporządkowanej $i \leqslant j$, niech będzie dany morfizm $f_{ij} : X_i \to X_j$ w ten sposób, że dla każdych $i \leqslant j \leqslant k$ mamy $f_{jk} f_{ij} = f_{ik}$ ($f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$).
Będziemy pisać $(X_i, f_{jk})_{i \in I, j<k}$ lub $(X_i)_{i \in I}$ lub $(f_{jk})_{i \in I, j<k}$.
Taki wybór jest równoważny zadaniu funktora $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}$, gdzie $(I, \leqslant)$ traktujemy jako kategorię tak jak w zadaniu 7 listy 1 (jest to w praktyce tylko kolejny zapis, najkrótszy).

Definicja granicy
Granicą odwrotną funktora $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}$ (*granicą projektywną*, *granicą*) nazywamy $X \in \mathcal{C}$ wraz z kolekcją morfizmów $(f_i : X \to X_i)_{i \in I}$ taką, że

- Dla każdego $i \in I$, $f_{ij} f_i = f_j$.
- Dla dowolnej innej kolekcji $(f'_i : X' \to X_i)_{i \in I}$ spełniającej powyższy warunek, istnieje jedyny morfizm $f : X' \to X$, taki że $f_i f = f'_i$.

X oznaczamy przez $\varprojlim F$ lub $\lim F$.

W powyższej definicji $(I, \leqslant)$ może być zastąpiony przez dowolną kategorię $\mathcal{I}$ (rozumianą jako kategorię indeksów).

W ćwiczeniach jest równoważna definicja granicy odwrotnej poprzez funktory reprezentowalne.

Przykłady ($\mathcal{C}$ – kategoria)

1. Produkt
   $X \times Y = \varprojlim(X, Y)$, tzn. $I = \{0, 1\}$ z dyskretnym porządkiem i $F(0) = X, F(1) = Y$.
   Jeśli I jest dowolnym dyskretnym posetem i dla $i \in I$, $F(i) = X_i$, to

$$\prod_{i \in I} X_i := \varprojlim F.$$

2. Produkt włóknisty (pull-back)
   Dla $f : X \to Z, g : Y \to Z$ definiujemy pull-back f i g jako

$$X \times_Z Y := \varprojlim(f : X \to Z, g : Y \to Z).$$

   Czyli zbiorem uporządkowanym jest $I = \{0, 1, 2\}$ z relacją $0 \leqslant 1, 1 \leqslant 2$ i $F(0) = X, F(1) = Y, F(2) = Z, F(0 \leqslant 2) = 0, F(1 \leqslant 2) = f$.
   Inaczej mówiać morfizmy $X \times_Z Y \to X, Y$ są uniwersalne spośród tych dla których następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd} X \times_Z Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}.$$

   W **Set**:

$$X \times_Z Y = \{(x, y) \in X \times Y | f(x) = g(y)\}$$

3. Jądro
   Załóżmy, że $\mathcal{C}$ ma obiekt zerowy 0, tzn. obiekt będacy obiektem końcowym i początkowym. Wtedy dla każdej pary obiektów $X, Y \in \mathcal{C}$ istnieje morfizm zerowy $0 : X \to Y$.
   Dla każdego morfizmu $f : X \to Y$, $\ker(f)$ to morfizm $k : K \to X$ uniwersalny względem morfizmów $s : Z \to X$ takich, że $fs = 0$.
   Równoważnie

$$\ker(f) = \varprojlim(f : X \to Y, 0 : 0 \to Y) = X \times_Y 0.$$

   (a) W kategorii grup $\ker(f : G \to H)$ jest włożeniem $f^{-1}(e)$ w G.
   (b) W $\mathbf{Set}_*$, $0 = *$ i $\ker(f : X \to Y)$ jest włożeniem $f^{-1}(*)$ w X.

4. Jeśli $(I, \leqslant)$ ma element najmniejszy i_0 (ogólniej kategoria indeksów element początkowy), to $\varprojlim F = F(i_0)$.

Definicja kogranicy

Granicą prostą funktora $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}$ (*granicą induktywną, kogranicą*) nazywamy $X \in \mathcal{C}$ wraz z kolekcją morfizmów $(f_i : X_i \to X)_{i \in I}$ taką, że

- Dla każdego $i \in I$, $f_j f_{ij} = f_i$.
- Dla dowolnej innej kolekcji $(f'_i : X_i \to X')_{i \in I}$ spełniającej powyższy warunek, istnieje jedyny morfizm $f : X \to X'$, taki że $f f_i = f'_i$.

X oznaczamy przez $\varinjlim F$ lub $\operatorname{colim} F$.
Przykłady ($\mathcal{C}$ – kategoria)

1. Koprodukt
   $X \coprod Y = \varinjlim(X, Y)$ i dla dowolnego dyskretnego posetu I,

   $$\coprod_{i \in I} X_i := \varinjlim F.$$

   W kategorii grup

   $$\coprod_{i \in I} G_i = \bigoplus_{i \in I} G_i.$$

2. Koprodukt włóknisty (push-out)
   Dla $f : Z \to X, g : Z \to Y$ definiujemy push-out f i g jako

   $$X \coprod_Z Y := \varinjlim(f : Z \to X, g : Z \to Y).$$

   Inaczej mówiać morfizmy $X \times_Z Y \to X, Y$ są uniwersalne spośród tych dla których następujący diagram jest przemienny

   $$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & X \coprod_Z Y \end{array} .$$

   W **Sets**,

   $$X \coprod_Z Y = (X \coprod Y)/f(z) \sim g(z).$$

   W $\mathbf{Alg}_K$,

   $$S_1 \coprod_R S_2 = S_1 \otimes_R S_2.$$

3. Kojądro
   Załózmy, że $\mathcal{C}$ ma obiekt zerowy 0. Dla każdego morfizmu $f : X \to Y$, $\operatorname{coker}(f)$ to morfizm $k : Y \to C$ uniwersalny względem morfizmów $s : Y \to Z$ takich, że $sf = 0$.
   Równoważnie

   $$\operatorname{coker}(f) = \varinjlim(f : X \to Y, 0 : X \to 0) = Y \coprod_X 0.$$

   (a) W $\mathbf{Mod}_R$, $\operatorname{coker}(f : M \to N) = N \to N/f(M)$.

(b) W $\mathbf{Set}_*$, $\operatorname{coker}(f : X \to Y) = Y \to Y/f(X)$ ($f(X)$ ściągamy do punktu (wyróżnionego), resztę zostawiamy).

4. Jeśli $(I, \leqslant)$ ma element największy i_∞ (ogólniej kategoria indeksów element końcowy), to $\varinjlim F = F(i_\infty)$.

Definicja

Załóżmy, że poset $(I, \leqslant)$ jest *skierowany*, tzn. dla każdych $i, j \in I$ istnieje $k \in I$ taki, że $i, j \leqslant k$. Wtedy $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}$ nazywamy *systemem prostym* a $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ *systemem odwrotnym.*

$\varprojlim F$ to *granica systemu odwrotnego*, $\varinjlim F$ *granica systemu prostego.*

Uwaga (ćwiczenie)

Niech $(I, \leqslant)$ będzie skierowanym posetem, $i \in I$ i $I_i = \{j \in I | j \geqslant i\}$. Wtedy dla dowolnego systemu odwrotnego $(X_i)_{i \in I}$,

$$\varprojlim (X_j)_{j \in I} = \varprojlim (X_j)_{j \in I_i}.$$

Podobnie dla granicy prostej.

Przykłady

1. W $\mathbf{Mod}_R$ granica systemu prostego $(M_i)_{i \in I}$, to (ćwiczenie)

$$\varinjlim (M_i)_{i \in I} = \bigoplus_{i \in I} M_i / \langle (w_j f_{ij} - w_i)(M_i) | \forall i \leqslant j \rangle,$$

gdzie $w_i : M_i \to \bigoplus_{i \in I} M_i$ jest włożeniem w sumę prostą.
Granica systemu odwrotnego $(M_i)_{i \in I}$, to (ćwiczenie)

$$\varprojlim (M_i)_{i \in I} = \{(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} M_i | (\forall i \leqslant j) f_{ij}(a_j) = a_i\}.$$

Powyższa konstrukcja granicy systemu odwrotnego działa również w kategorii grup, pierścieni i przestrzeni topologicznych.

2. Weźmy pierścień R i ideał $I \subset R$. Mamy system odwrotny (R/I^n). Jego granica $\varprojlim (R/I^n)$ zwie się *uzupełnieniem* R względem I. Np. $\mathbb{Z}_p := \varprojlim (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})_{n \in \mathbb{N}}$ – pierścien całkowitych liczb p-adycznych.

3. Weźmy poset skierowany $(\mathbb{N}, |)$ (relacja podzielności). Systemem prostym będą ciała skończone charakterystyki p, $(\mathbb{F}_{p^n})_{n \in \mathbb{N}}$ z rozszerzeniami ciał. Wtedy $\varinjlim (\mathbb{F}_{p^n})_{n \in \mathbb{N}} = \overline{\mathbb{F}_p}$, algebraiczne domknkięcie $\mathbb{F}_p$.
Ogólniej, dowolna struktura jest granicą prostą jej podstruktur skończenie generowanych.

4. Grupy proskończone to granice systemów odwrotnych grup skończonych w kategorii grup topologicznych.

Definicja
Funktor $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zachowuje granice odwrotne, gdy dla każdego $F : (I, \leqslant) \to \mathcal{C}$, jeśli $X = \varprojlim F$, to $G(X) = \varprojlim(G \circ F)$.
Analogiczna definicja dla granic prostych.

Twierdzenie (dowód na następnym wykładzie)
Jeśli F jest funktorem lewodołączonym do G, to F zachowuje granice proste i G zachowuje granice odwrotne.

Przykłady (ilustracje)

1. G – funktor zapominania, F – lewo-dołączony do G

   (a) $G : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ – funktor grupy wolnej.
   G zachowuje granice odwrotne, czyli np. produkty:
   $$G(H_1 \times H_2) = G(H_1) \oplus G(H_2).$$
   G nie zachowuje granic prostych, czyli np. koproduktów:
   $$G(H_1 * H_2) \ncong G(H_1) \cup G(H_2).$$
   F zachowuje granice proste, czyli np. koprodukty:
   $$F_{X \cup Y} \cong F_X * F_Y.$$
   G nie zachowuje granic odwrotnych, czyli np. produktów:
   $$F_{X \times Y} \ncong F_X \oplus F_Y.$$

   (b) $G : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$, $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ – funktor abelianizacji.
   G zachowuje produkty i nie zachowuje koproduktów:
   $$H_1 * H_2 \ncong H_1 \oplus H_2.$$
   G przenosi grupy w $\mathbf{Ab}$ (grupy abelowe) na grupy w $\mathbf{Grp}$ (grupy abelowe).
   F zachowuje koprodukty
   $$(H_1 * H_2)^{\mathrm{ab}} \cong H_1^{\mathrm{ab}} \oplus H_2^{\mathrm{ab}},$$

i przypadkiem również produkty

$$(H_1 \oplus H_2)^{\mathrm{ab}} \cong H_1^{\mathrm{ab}} \oplus H_2^{\mathrm{ab}}.$$

Ale F nie zachowuje jądra, weźmy np.

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\ f\ } S_3 \xrightarrow{\ g\ } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

gdzie $f = \ker(g),\ g = \operatorname{coker}(f)$. Po nałożeniu F dostajemy

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \xrightarrow{\ f^{\mathrm{ab}}\ } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\ g^{\mathrm{ab}}=\mathrm{id}\ } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\,.$$

Ale $f^{\mathrm{ab}} = 0 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nie jest jądrem $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$.
W szczególności F nie przenosi monomorfizmów na monomorfizmy: f przechodzi na 0.
F zachowuje kojądra: $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} = \operatorname{coker}(0 : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
Zachowywanie kojąder implikuje też:

$$H_1 \leqslant H_2 \implies (H_1/H_2)^{\mathrm{ab}} \cong H_1^{\mathrm{ab}}/H_2^{\mathrm{ab}}.$$

2. Dla R-modułu M, funktor $\cdot \otimes_R M : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ jest lewo-dołączony do h_M (interpretowanego jeko funktor w $\mathbf{Mod}_R$).
W szczególności $\cdot \otimes_R M$ zachowuje kojądra, czyli również epimorfizmy, tzn.

$$N \twoheadrightarrow N' \implies N \otimes_R M \twoheadrightarrow N' \otimes_R M.$$

Funktor $\cdot \otimes_R M$ nie zachowuje monomorfizmów – np. $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$, ale

$$\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \otimes_Z \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

nie jest monomorfizmem, bo

$$\mathbb{Z} \otimes_Z \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ \text{ i } \ \mathbb{Q} \otimes_Z \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = 0.$$