ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 6

Twierdzenie
Jeśli F jest funktorem lewodołączonym do G, to F zachowuje granice proste i G zachowuje granice odwrotne.

Dowód (dla F)
Weźmy poset $(I, \leqslant)$ i odpowiednią kolekcję $(X_i, f_{jk})_{i\in I, j\leqslant k}$.
Niech $(X, f_i)_{i\in I} = \varinjlim (X_i)_{i\in I}$.
Mamy wtedy kolekcję $(F(X_i), F(f_{jk}))_{i\in I, j\leqslant k}$.
Chcemy pokazać, że $(F(X), F(f_i))_{i\in I} = \varinjlim (F(X_i))_{i\in I}$.
Weźmy dowolny $Y \in \mathcal{D}$ i morfizmy $g_i : F(X_i) \to Y$ jak z definicji granicy prostej. Ustalmy też izomorfizm dołączenia

$$\iota : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(\cdot), \cdot) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, G(\cdot)).$$

Claim
Niech $A, B \in \mathcal{C}$ i $C \in \mathcal{D}$, $\alpha : A \to B$, $\beta : F(A) \to C$, $\gamma : F(B) \to C$. Wtedy

$$\beta = \gamma \circ F(\alpha) \iff \iota(\beta) = \iota(\gamma) \circ \alpha.$$

Dowód Claimu
Pokazujemy tylko $\Longrightarrow$.
Ponieważ ι jest morfizmem funktorów, następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), C) & \xrightarrow{h^C(F(\alpha))} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F(A), C) \\
{\scriptstyle\iota}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\iota} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, G(C)) & \xrightarrow{h^{F(Y)}(\alpha)} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, G(C))
\end{array} \quad .$$

Nałożmy funkcje z powyższego diagramu na γ.

$$[\iota \circ h^C(F(\alpha))](\gamma) = \iota(\gamma \circ F(\alpha)) = \iota(\beta).$$

$$[h^{F(Y)}(\alpha) \circ \iota](\gamma) = \iota(\gamma) \circ \alpha.$$

Stąd $\iota(\beta) = \iota(\gamma) \circ \alpha$. $\square$

Z Claimu dla dowolnych $j \leqslant k$ mamy $\iota(g_j) = \iota(g_k) \circ f_{jk}$.
Czyli kolekcja $(G(Y), \iota(g_i))_{i\in I}$ jest "kandydatem" na $\varinjlim (X_i)_{i\in I}$.
Stąd istnieje jedyny morfizm $f : X \to G(Y)$ taki, że

$$f \circ f_i = \iota(g_i).$$

Z Claimu, istnieje jedyny morfizm $g = \iota^{-1}(f) : F(X) \to Y$ taki, że

$$g \circ F(f_i) = g_i. \quad \square$$

Definicja (Ab-kategorii i kategorii addytywnej)
Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią.

A1 (definicja Ab-kategorii)
Dla każdych $X, Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X, Y)$ ma strukturę grupy abelowej i składanie morfizmów jest rozdzielne względem tego działania.

A2 Istnieje $0 \in \mathcal{C}$, obiekt zerowy (końcowy i początkowy).

A3 (zakładamy A1 i A2)
Dla każdych $X_1, X_2 \in \mathcal{C}$ istnieje $Y \in \mathcal{C}$ wraz z

$$i_1 : X_1 \to Y,\ i_2 : X_2 \to Y,\ b_1 : Y \to X_1,\ b_2 : Y \to X_2$$

takimi, że

$$b_1 i_1 = \mathrm{id}_{X_1},\ b_2 i_2 = \mathrm{id}_{X_2},\ b_1 i_1 + b_2 i_2 = \mathrm{id}_Y,\ \ b_1 i_2 = b_2 i_1 = 0.$$

Y nazywamy *sumą prostą* (*biproduktem*) X_1 i X_2 i oznaczamy $X_1 \oplus X_2$.
Kategorię nazywamy *addytywną* gdy spełnia A1, A2 i A3.

Fakt
Suma prosta w kategorii addytywnej jest produktem i koproduktem.
Dowód (Pokażemy, że $X_1 \oplus X_2$ wraz z f_1 i f_2 jest produktem)
Weźmy $f : Z \to X_1, g : Z \to X_2$. Pokażemy, że $\phi := i_1 f - i_2 g$ jest jedynym $\phi : Z \to X_1 \oplus X_2$ takim, że odpowiednie diagramy są przemienne.
Przemienność:

$$b_1\phi = b_1 i_1 f + b_1 i_2 g = \mathrm{id}_{X_1} f + 0g = f.$$

Podobnie $b_2\phi = g$.
Jedyność: Załóżmy, że mamy $\phi : Z \to X_1 \oplus X_2$ takie, że $b_1\phi = f,\ b_2\phi = g$.
Wtedy

$$i_1 b_1 \phi = i_1 f,\ i_2 b_2 \phi = i_2 g,$$

$$i_1 f + i_2 g = (i_1 b_1 + i_2 b_2)\phi = \mathrm{id}_Y \phi = \phi. \quad \square$$

Definicja (kategorii abelowej)
A4 Dla dowolnego morfizmu $f : X \to Y$ istnieje ciąg (rozkład f):

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C$$

taki, że

1. $ji = f$.

2. $\ker(f) = (K, k)$, $\operatorname{coker}(f) = (c, C)$.

3. $\ker(c) = (I, j)$, $\operatorname{coker}(k) = (i, I)$ (I nazywamy *obrazem* f).

Kategorię nazywamy *abelową*, gdy jest addytywna i spełnia A4.

Uwaga (do A4)
W dowolnej kategorii addytywnej, w której istnieją jądra i kojądra dla $f : X \to Y$ mamy:

$$K \xrightarrow{k} X \xrightarrow{i} I, \qquad I' \xrightarrow{j} Y \xrightarrow{c} C,$$

gdzie $k = \ker(f)$, $i = \operatorname{coker}(k)$, $c = \operatorname{coker}(f)$, $j = \ker(c)$.
I' nazywamy *obrazem* f a I nazywamy *koobrazem* f.
Wtedy mamy jedyny morfizm $l : I \to I'$ taki, że $\ker(l) = \operatorname{coker}(l) = 0$. Kategoria jest abelowa wtedy i tylko wtedy, gdy l jest izomorfizmem (czyli obraz jest izomorficzny z koobrazem poprzez l).
Czyli własność A4 odpowiada twierdzeniu o izomorfiźmie (dla grup np. $G/\ker(f) \cong \operatorname{im}(f)$).

Przykłady

1. $\mathbf{Mod}_R$ to kategoria abelowa.

2. Przemienne grupy algebraiczne (kategoria addytywna, ale nie abelowa).
   Rozważmy homomorfizm Frobeniusa
   $$\mathrm{Fr} : (K, +) \to (K, +),$$
   gdzie $\mathrm{Fr}(a) = a^p$ i K jest ciałem charakterystyki $p > 0$.
   Wtedy Fr jest monomorfizmem i epimorfizmem, ale nie jest izomorfizmem. W kategorii abelowej nie jest to możliwe.
   W większej kategorii *schematów grupowych* Fr nie jest monomorfizmem, bo $\ker(\mathrm{Fr})$ odpowiada algebrze Hopfa $K[X]/(X^p)$.
   Nad ciałem charakterystyki 0 przemienne grupy algebraiczne są kategorią abelową, bo definiowalny homomorfizm grup algebraicznych jest morfizmem.

3. Dla $\mathcal{C}$ małej i $\mathcal{A}$ abelowej, $\mathrm{Func}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ jest kategorią abelową.
   Wynika to wprost z abelowości kategorii $\mathcal{A}$, np.
   $$(G \oplus F)(X) := G(X) \oplus F(X).$$

W szczególności presnopy grup abelowych nad przestrzenią X ($\mathbf{Psh}_X$) to kategoria abelowa.

4. Snopy grup abelowych nad przestrzenią X ($\mathbf{Sh}_X$)
Od razu widać, że $\mathbf{Sh}_X$ są kategorią addytywną. Jednak kojądro (w kategorii presnopów) morfizmu snopów może nie być snopem. Niech $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ będzie snopem funkcji holomorficznych w $\mathbb{C}$ (z dodawaniem funkcji) i $\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}$ będzie snopem funkcji holomorficznych w $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (z mnożeniem funkcji). Rozważmy morfizm
$$\exp : \mathcal{O}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}$$
niech $\mathcal{F}$ będzie kojądrem exp w kategorii presnopów (tzn. dla każdego otwartego V, $\mathcal{F}(V) = \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}}(V)/\exp(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(V))$) i weźmy $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Wtedy $s := [\mathrm{id}_U] \in \mathcal{F}(U) \setminus \{0\}$ (bo nie istnieje globalny logarytm), ale dla pokrycia U przez dyski (lub dowolne zbiory jednospójne) $U = \bigcup U_i$, mamy $s|_{U_i} = 0$ (bo na dysku możemy logarytmować). Stąd $\mathcal{F}$ nie jest snopem.
Jednak $\mathbf{Sh}_X$ jest wciąż abelowa, co udowodnimy później.

Twierdzenie
Istnieje lewy funktor dołaczony do funktora zapominania $\mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Psh}_X$ (funktor *usnopienia*) $^+ : \mathbf{Psh}_X \to \mathbf{Sh}_X$.
Dla morfizmu snopów $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mamy
$$\ker_{\mathbf{Sh}_X}(f) = \ker_{\mathbf{Psh}_X}(f), \quad \mathrm{coker}_{\mathbf{Sh}_X}(f) = \mathrm{coker}_{\mathbf{Psh}_X}(f)^+$$
i $\mathbf{Sh}_X$ jest kategorią abelową.
Dowód
Dla presnopa $\mathcal{F}$ i $x \in X$ definiujemy $\mathcal{F}_x$ (*źdźbło* $\mathcal{F}$ w x) jako $\varinjlim(\mathcal{F}(U))_{U \ni x}$ (system otoczeń x jest skierowany przez **odwrotną** inkluzję!).
Definiujemy $\bar{\mathcal{F}}$ jako sumę rozłączną wszystkich źdźbeł i
$$\mathcal{F}^+(U) = \{s : U \to \bar{\mathcal{F}} | \forall x\, s(x) \in \mathcal{F}_x \text{ i } \forall x \in X \exists U \ni x \exists s_U \in \mathcal{F}(U)\ (s|_U = s_U)\}.$$
Jasne jest, że $\mathcal{F}^+$ jest presnopem. Jest to też snop (*usnopienie* $\mathcal{F}$), bo dla dowolnego pokrycia $U = \bigcup_i U_i$ jeśli mamy zgodny system $s_i \in \mathcal{F}^+(U_i)$, to przedłuża on się on jednoznacznie do funkcji $s : X \to \bar{\mathcal{F}}$ i z tego, że lokalny warunek z definicji $\mathcal{F}^+(U)$ jest spełniony dla każdego s_i wynika, że jest on spełniony dla s.
Dla dowolnego morfizmu presnopów $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ mamy dla każdego $x \in X$ homomorfizm źdźbeł $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ i homomorfizm $\bar{f} : \bar{\mathcal{F}} \to \bar{\mathcal{G}}$, który

indukuje morfizm snopów $f^+ : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}^+$. Stąd usnopienie jest funktorem (lewym dołączonym do zapominania – ćwiczenie).

Dla dowolnego morfizmu snopów $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ jądro f w kategorii presnopów $\mathcal{K}$ jest snopem, bo dla dowolnego pokrycia $U = \bigcup_i U_i$ i zgodnego systemu $s_i \in \mathcal{K}(U_i)$, (s_i) przedłuża się jednoznacznie do $s \in \mathcal{F}(U)$ (bo $\mathcal{F}$ jest snopem) i $f(s)|_{U_i} = f(s_i) = 0$, stąd $f(s) = 0$ (bo $\mathcal{G}$ jest snopem) i $s \in \mathcal{K}(U)$. Jest oczywiste, że $\mathcal{K}$ jest też jądrem f w kategorii snopów.

Niech teraz $\mathcal{H}$ będzie kojądrem f w kategorii presnopów i pokażemy, że $\mathcal{H}^+$ jest kojądrem f w kategorii snopów. Weźmy dowolny morfizm snopów $g : \mathcal{G} \to \mathcal{S}$, taki że $gf = 0$. Wtedy g faktoryzuje się przez jedyny $l : \mathcal{H} \to \mathcal{S}$ a ten z dołączoności faktoryzuje się przez jedyny $k : \mathcal{H}^+ \to \mathcal{S}$. Czyli $\mathcal{H}^+$ jest kojądrem f w kategorii snopów.

Niech teraz
$$\mathcal{K} \xrightarrow{k} \mathcal{F} \xrightarrow{i} \mathcal{I} \xrightarrow{j} \mathcal{G} \xrightarrow{c} \mathcal{K}'$$
będzie kanonicznym rozłożeniem f w kategorii presnopów. Wtedy
$$\mathcal{K} \xrightarrow{k} \mathcal{F} \xrightarrow{i^+} \mathcal{I}^+ \xrightarrow{j^+} \mathcal{G} \xrightarrow{c^+} \mathcal{K}'^+$$
jest kanonicznym rozłożeniem f w kategorii snopów (usnopienie zachowuje jądra i kojądra). $\square$