ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 8

Przykłady

1. Funktory reprezentowalne h_A są lewo-dokładne.
   Funktory (ko)reprezentowalne h^A są też lewodokładne jako funktory z $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ w **Ab**, tzn. ciąg dokładny
   $$0 \leftarrow X \leftarrow Y \leftarrow Z \leftarrow 0$$
   przechodzi na ciąg dokładny poza $\mathrm{Hom}(Z, A)$,
   $$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(Y, A) \to \mathrm{Hom}(Z, A) \to 0.$$

2. Funktor $\cdot \otimes_R M : \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ jest prawo-dokładny (jako dołączony z lewej do h_M).

3. Funktor
   $$\Gamma : \mathbf{Sh}_X \to \mathbf{Ab}, \quad \Gamma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$
   jest dołączony z prawej do funktora snopa stałego
   $$\mathbf{Ab} \ni A \mapsto A_X \in \mathbf{Sh}_X,\ \forall U \subseteq V, A_X(U) = A, A_X(V) \to A_X(U) = \mathrm{id}_A\,.$$
   czyli jest lewo-dokładny (również dlatego, że zachowuje jądra, skoro jądro w kategorii presnopów jest takie same jak jądro w kategorii snopów).
   Następujący ciąg snopów jest dokładny
   $$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\cdot 2\pi n i} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*} \longrightarrow 0, \text{ bo}$$
   (a) Oczywiście $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}^*} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}$.
   (b) Również dla każdej funkcji $g : U \to \mathbb{C}$ i U spójnego, jeśli $\exp(g) = 1$, to $g(U) \subset 2\pi i\mathbb{Z}$. Ale $g(U)$ jest spójny, czyli g jest funkcją stałą, równą $2\pi n i$ dla pewnego $n \in \mathbb{Z}$. Stąd $\mathrm{im}(\cdot 2\pi n i) = \ker(\exp)$.
   (c) Wiemy też, że dla U jednospójnego $\exp|_U : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(U) \to \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*}(U)$ jest epimorfizmem.

   Ale ciąg cięć globalnych
   $$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*) \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*) \longrightarrow 0,$$
   nie jest dokładny w $\mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*)$, bo dla $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$ nie istnieje globalny logarytm.

4. Niech $\mathcal{I}$ będzie małą kategorią indeksów. Z Zadania 1 listy 5, istnieją granice odwrotne względem kategorii $\mathcal{I}$ wtedy i tylko wtedy, gdy funktor
$$\mathcal{C} \to \mathrm{Func}(\mathcal{I}, \mathcal{C}), \quad X \mapsto \Delta_X$$
ma funktor prawo-dołaczony: funktor granicy odwrotnej
$$\varprojlim : \mathrm{Func}(\mathcal{I}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}.$$
Stąd każda granica odwrotna jest funktorem lewo-dokładnym.
Podobnie granica prosta jest funktorem lewo-dołączonym do Δ i prawo-dokładnym.
Podobnie każda granica prosta jest funktorem prawo-dokładnym.
Np. jeśli mamy ciągi dokładne:
$$0 \to A \to B \to C \to 0, \quad 0 \to A' \to B' \to C' \to 0$$
to następujący ciąg jest dokładny
$$0 \to A \oplus A' \to B \oplus B' \to C \oplus C' \to 0,$$
bo $\oplus$ jest naraz produktem i koproduktem, czyli jest dokładny.

Fakt Następujące warunki są równoważne

1. Krótki ciąg dokładny
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } C \xrightarrow{\ g\ } B \longrightarrow 0,$$
rozszczepia się.

2. Istnieje morfizm $g' : B \to C$ taki, że $gg' = \mathrm{id}_C$.

3. Istnieje morfizm $f' : A \to B$ taki, że $f'f = \mathrm{id}_A$.

Dowód
Pokażemy tylko równoważność 1. $\Longleftrightarrow$ 2.. Wystarczy pokazać $\Longleftarrow$. Musimy zdefiniować $g' : C \to A$ i pokazać, że układ C, f, f', g, g' jest sumą prostą A, B.
Weźmy morfizm $\mathrm{id}_C - g'g : C \to C$. Wtedy $g(\mathrm{id}_C - g'g) = g - g = 0$, czyli $\mathrm{id}_C - g'g$ faktoryzuje się przez pewien morfizm $f' : C \to A$ (bo $\ker(g) = A$). Mamy
$$ff'f = (\mathrm{id}_C - g'g)f = f.$$

Ponieważ f jest monomorfizmem, $f'f = \mathrm{id}_A$.
Mamy również

$$ff'g'g = (\mathrm{id}_C - g'g)g'g = g'g - g'gg'g = g'g - g'g = 0.$$

Ponieważ f jest monomorfizmem i g epimorfizmem, $f'g' = 0$
Z definicji f', $ff' + g'g = \mathrm{id}_C$. $\square$

Definicja

1. Obiekt A nazywamy *projektywnym*, gdy funktor h_A jest dokładny.
2. Obiekt A nazywamy *injektywnym*, gdy funktor h^A jest dokładny.

Fakt (kategoryjna definicja obiektów projektywnych i injektywnych)

1. Obiekt Y jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych morfizmów
$$f : X \twoheadrightarrow X', \quad g : Y \to X'$$
istnieje morfizm $h : Y \to X$ taki, że $fh = g$.
2. Obiekt Y jest injektywny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych morfizmów
$$f : X' \hookrightarrow X, \quad g : X' \to Y$$
istnieje morfizm $h : X \to Y$ taki, że $hf = g$.

Przykłady

1. Moduł wolny jest projektywny.
Moduł jest projektywny wtedy i tylko wtedy, gdy jest składnikiem prostym modułu wolnego (ćwiczenia).
2. Grupa abelowa jest injektywna wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna (ćwiczenia). Czyli $\mathbb{Q}$ jest injektywnym $\mathbb{Z}$-modułem.

Fakt
Załóżmy, że $0 \to A \to B \to C \to 0$ jest ciągiem dokładnym. Jeśli C jest projektywny lub A jest injektywny, to ciąg się rozszczepia.

Funktory pochodne

Ustalmy kategorię abelową $\mathcal{A}$.
Kompleksem *cyklów* nazywamy kompleks postaci

$$X_* : \qquad \ldots \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} X_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \ldots .$$

Dla kompleksu cyklów X_* definiujemy $H_n(X_*)$ (n-te homologie X_*) jak dla kompleksów kołańcuchów.
Zapis $X_* \to M$ oznacza, że mamy kompleks cyklów postaci

$$\dots \xrightarrow{d_2} X_1 \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{d_0} M \longrightarrow 0,$$

a $M \to X^*$ oznacza, że mamy kompleks kocyklów postaci

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} X^0 \xrightarrow{d^1} X^1 \xrightarrow{d^2} \dots \quad .$$

Twierdzenie Hilberta o syzygiach
Syzygia w astronomii to sytuacja, gdy 3 ciała leżą na jednej linii (zwykle słońce, ziemia, księżyc), czyli zachodzi pomiędzy nimi pewnien związek.
Dla dowolnego skończenie generowanego (przez n_0 elementów) R-modułu M, tworzymy ciąg dokładny składający się z modułów wolnych.
Najpierw znajdujemy epimorfizm $d_0 : F_0 \to M$, (gdzie $F_0 = R^{n_0}$) jego jądro (czyli R-zależności pomiędzy generatorami M) ma skończenie wiele generatorów, jako podmoduł skończenie generowanego modułu nad pierścieniem noetherowskim, powiedzmy n_1 generatorów.
Bierzemy epimorfizm $d_1 : F_1 \to \ker(d_0)$ (gdzie $F_1 = R^{n_1}$), $\ker(d_1)$ odpowiada R-zależnościom pomiędzy generatorami $\ker(d_0)$ (czyli R-zależnościom pomiędzy R-zależnościami), itd.
Tw. Hilberta o syzygiach mówi, że istnieją wybory generatorów dla których ten ciąg się urywa po $r + 1$ krokach, czyli otrzymujemy acykliczny kompleks postaci

$$0 \to F_r \to F_{r-1} \to \dots \to F_0 \to M \to 0,$$

gdzie F_i są wolne (w szczególności projektywne).
Ten kompleks można rozumieć jako "kompletną informację" o M.

Definicja
Rezolwenta projektywna X jest to acykliczny kompleks postaci $P_* \to X$, gdzie dla każdego i, P_i jest projektywny.
Rezolwenta injektywna X jest to acykliczny kompleks postaci $X \to I^*$, gdzie dla każdego i, I^i jest injektywny.

Definicja
Kategoria abelowa $\mathcal{A}$ ma *dostatecznie dużo obiektów projektywnych*, gdy dla każdego $X \in \mathcal{A}$ istnieje obiekt projektywny $P \in \mathcal{A}$ i epimorfizm $P \twoheadrightarrow X$.
Kategoria abelowa $\mathcal{A}$ ma *dostatecznie dużo obiektów injektywnych*, gdy dla każdego $X \in \mathcal{A}$ istnieje obiekt injektywny $I \in \mathcal{A}$ i monomorfizm $X \hookrightarrow I$.

Fakt (zadanie)
Jeśli $\mathcal{A}$ ma dostatecznie dużo obiektów projektywnych (injektywnych), to każdy obiekt ma rezolwentę projektywną (injektywną).

Definicja (funktorów pochodnych)
Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie funktorem addytywnym między kategoriami abelowymi ($\mathcal{B}$ to zwykle jakaś kategoria R-modułów).
$L_nF : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – *lewy n-ty funktor pochodny F* definiujemy jako

$$L_nF(X) := H_n(F(P_* \to 0)),$$

gdzie $P_* \to X$ jest (pewną) rezolwentą projektywną X.
Analogicznie definiujemy

$$R^nF(X) := H^n(F(0 \to I^*)),$$

prawy n-ty funktor pochodny F, dla rezolwenty injektywnej $X \to I^*$.

Twierdzenie 1 (istnienie i jednoznaczność L_nF, R^nF – ćwiczenie)
Jeśli $\mathcal{A}$ ma dostatecznie wiele obiektów projektywnych (injektywnych), to dla każdego F, L_nF (R^nF) istnieje i nie zależy od wyboru rezolwenty.

W twierdzeniach 2. i 3. zakładamy, że istnieje dostatecznie dużo odpowiednich obiektów (projektywnych lub injektywnych).
Twierdzenie 2 (funktory pochodne a dokładność)
$L_0F = F$ wtedy i tylko wtedy, gdy F jest prawodokładny.
$R^0F = F$ wtedy i tylko wtedy, gdy F jest lewodokładny.

Twierdzenie 3 (aksjomaty teorii homologii)
Jeśli F jest prawo-dokładny, to dla każdego krótkiego ciągu dokładnego

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0,$$

istnieje długi ciąg dokładny

$$\ldots \xrightarrow{L_2F(g)} L_2F(B) \xrightarrow{\delta_2} L_1F(A) \xrightarrow{L_1F(f)} L_1F(C) \xrightarrow{L_1F(g)} L_1F(B)$$

$$L_1F(B) \xrightarrow{\delta_1} F(A) \xrightarrow{F(f)} F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \longrightarrow 0,$$

gdzie morfizmy δ_n są odpowiednio funktorialne.
Ciąg funktorów i naturalnych morfizmów (L_nF, δ_n) spełniający powyższe i znikający na obiektach projektywnych jest jedyny z dokładnością do izomorfizmu.
Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla funktorów prawodokładnych F i prawych pochodnych R^nF.

Twierdzenie 4
W kategorii $\mathbf{Mod}_R$ istnieje dostatecznie wiele obiektów projektywnych i injektywnych.
W kategorii $\mathbf{Sh}_X$ istnieje dostatecznie wiele obiektów injektywnych.

Definicje

1. $A, B \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ – kategoria abelowa

$$\mathrm{Ext}^n(A,B) := R^n h^B(A) \ (\cong R^n h_A(B))$$

2. $A, B \in \mathbf{Mod}_R$

$$\mathrm{Tor}_n(A,B) := L_n(A \otimes_R \cdot)(B) \ (\cong L_n(\cdot \otimes_R B)(A))$$

3. Kohomologie snopów: $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$

$$H^n(X, \mathcal{F}) := R^n\Gamma(\mathcal{F}),$$

   gdzie Γ jest funktorem cięć globalnych.

4. Kohomologie grup: Niech G będzie grupą, która działa (przez automorfizmy) na grupie abelowej A. Wtedy A jest $\mathbb{Z}G$-modułem. Niech $\mathbb{Z}$ będzie trywialnym $\mathbb{Z}G$-modułem (G działa poprzez identyczność). Definiujemy *n-te kohomologie G o współczynnikach z A* i *n-te homologie G o współczynnikach z A* jako

$$H^n(G,A) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A), \quad H_n(G,A) := \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(\mathbb{Z}, A).$$