ALGEBRA HOMOLOGICZNA, WYKŁAD 9

Twierdzenie 2 (część)
Jeśli F jest prawodokładny, to $L_0F = F$.
Jeśli F jest lewodokładny, to $R^0F = F$.
Dowód (dla prawodokładnych)
Mamy rezolwentę projektywną X,

$$\cdots \to P_1 \to P_0 \to X \to 0.$$

Wtedy

$$X = \operatorname{coker}(P_1 \to P_0), \quad L_0F(X) = \operatorname{coker}(F(P_1) \to F(P_0)).$$

Ale F jest prawodokładny, stąd F zachowuje kojądra. Czyli

$$L_0(F)(X) = \operatorname{coker}(F(P_1) \to F(P_0)) = F(\operatorname{coker}(P_1 \to P_0)) = F(X). \quad \square$$

Grupy Ext i rozszerzenia

Niech R będzie pierścieniem (przemiennym z 1) i $M, N \in \mathbf{Mod}_R$.
Rozszerzenie N przez M jest to ciąg dokładny postaci

$$E: \quad 0 \to N \to X \to M \to 0.$$

Rozszerzenia E jest *równoważne* E',

$$E': \quad 0 \to N \to X' \to M \to 0,$$

(ozn. $E \equiv E'$), gdy istnieje homomorfizm $f : X \to X'$ taki, że następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}_N}\downarrow & & {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

(f musi być izomorfizmem z lematu o 5 (zadanie)).
Jasne jest, że $\equiv$ jest relacją równoważności.
Zauważmy, że jeśli ciąg dokładny

$$E: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\ i\ } X \xrightarrow{\ j\ } M \longrightarrow 0$$

rozszczepia się poprzez $g : M \to X$, to E jest równoważny ciągowi dokładnemu sumy prostej poprzez

$$f : N \oplus M \to X, \quad f(n,m) = i(n) + g(m).$$

Niech $E_1(M,N)$ oznacza zbiór wszystkich rozszerzeń N przez M wydzielony przez relację $\equiv$.

Twierdzenie (dowód później)
$E_1(M,N)$ jest w bijekcji z $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$.

Uwaga
Może się zdarzyć, że $X \cong X'$, ale E nie jest równoważny E'.
Żeby zauważyć powyższe policzymy $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m)$ (dla R–pierścienia i $a \in R$, R/a oznacza R/aR).
Jeszcze ogólniej, weźmy pierścień R, $a \in R$ (zakładamy, że a nie jest dzielnikiem 0) i R-moduł M. Wtedy mamy projektywną rezolwentę R/a

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot a} R \longrightarrow R/a \longrightarrow 0 \quad .$$

Obliczymy $\mathrm{Ext}^n(R/a, M)$ licząc kohomologie kompleksu

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M) \xrightarrow{h^M(\cdot a)} \mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow 0 \quad .$$

Następujący diagram jest przemienny

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r, "h^M(\cdot a)"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{Hom}_R(R,M) \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\cdot a"] & M \arrow[r] & 0\,,
\end{tikzcd}$$

gdzie $f(\phi) = \phi(1)$.
Stąd

$$\mathrm{Ext}^n(R/aR, M) = \begin{cases} M/aM & \text{jeśli } n = 1 \\ 0 & \text{jeśli } n > 1. \end{cases}$$

Czyli dla $n, m \in \mathbb{N}$ mamy

$$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) = \frac{\mathbb{Z}/m}{n(\mathbb{Z}/m)} \cong \mathbb{Z}/(n,m).$$

W szczególności $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) = \mathbb{Z}/n$.
Ale np. dla $n = 3$ są tylko (z dokładnością do izomorfizmu) dwie abelowe

grupy rzędu 9 ($\mathbb{Z}/9$ i $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$), ale istnieją 3 nierównoważne rozszerzenia $\mathbb{Z}/3$ przez $\mathbb{Z}/3$.

Można pokazać, że dla R–noetherowskiego i X-skończenie generowanego, $X \cong M \oplus N$ implikuje, że rozszerzenie jest rozszczepialne.

Dowód twierdzenia
Definiujemy odwzorowanie

$$\chi : E_1(M,N) \to \operatorname{Ext}^1_R(M,N).$$

Dla rozszerzenia

$$E: \quad 0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} X \xrightarrow{i} M \longrightarrow 0$$

mamy z zadania 3 listy 7 (w, którym $P_* \to M$ może być dowolnym kompleksem acyklicznym), że istnieje diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \mathrm{id}_M\downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{i} & M & \longrightarrow & 0\,.
\end{array}$$

Definiujemy

$$\chi(E) := [\alpha] \in \frac{\ker(h^N(d_2) : \operatorname{Hom}(P_1,N) \to \operatorname{Hom}(P_2,N))}{\operatorname{im}(h^N(d_2) : \operatorname{Hom}(P_0,N) \to \operatorname{Hom}(P_1,N))} = \operatorname{Ext}^1(M,N).$$

Sprawdzamy, czy $\chi(E)$ jest dobrze określone.
Z powyższego diagramu, $h^N(d_2)(\alpha) = \alpha d_2 = 0$, czyli $\alpha \in \ker(h^N(d_2))$.
Jeśli mamy inne morfizmy α', β' takie, że powyższy diagram jest przemienny, to z zadania 6 z Listy 7 dostajemy $s : P_0 \to N$ takie, że

$$\alpha - \alpha' = sd_1 = h^N(d_1)(s), \quad \text{stąd} \quad [\alpha] = [\alpha'].$$

Czyli χ jest dobrze określone na klasie rozszerzeń.
Jest jasne, że χ zachowuje równoważność rozszerzeń (składamy α z identycznością).

Pokazujemy, że χ jest "1-1".

Weźmy dwa rozszerzenia

$$\begin{array}{ccccccccc}
E: 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & M & \longrightarrow & 0 \\
\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} & & \uparrow{\scriptstyle \beta} & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \uparrow \\
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & N & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \beta'} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \downarrow \\
E': 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & X & \xrightarrow{j'} & M & \longrightarrow & 0\ ,
\end{array}$$

takie, że $\chi(E) = \chi(E')$, czyli $\alpha - \alpha' = d_1^n(s) = sd_1$ dla pewnego $s : P_0 \to N$. Ponieważ d_0 jest epimorfizmem i $\mathrm{im}(i) = \ker(j)$, mamy $X = \mathrm{im}(i) + \mathrm{im}(\beta)$. Definiujemy

$$\gamma : X \to X', \quad \gamma(\beta(p_0) + i(n)) = (\beta' + i's)(p_0) + i'(n).$$

Sprawdzamy, że γ jest dobrze określone.

$$\beta(p_0) + i(n) = \beta(\bar{p_0}) + i(\bar{n})$$
$$\beta(p_0 - \bar{p_0}) = i(\bar{n} - n)$$

Wtedy

$$p_0 - \bar{p_0} \in \ker(d_0) = \mathrm{im}(d_1),$$

stąd istnieje $p_1 \in P_1$ taki, że $d_1(p_1) = p_0 - \bar{p_0},\ \alpha(p_1) = \bar{n} - n$.

$$(\beta' + i's)(p_0 - \bar{p_0}) = (\beta' d_1 + i' s d_1)(p_1)$$

Ale $sd_1 = \alpha - \alpha'$ i $i'\alpha' = \beta' d_1$, stąd

$$\beta' d_1 + i' s d_1 = \beta' d_1 + i'(\alpha - \alpha') = i'\alpha.$$

Dostajemy

$$(\beta' + i's)(p_0 - \bar{p_0}) = i'\alpha(p_1) = i'(\bar{n} - n)$$
$$(\beta' + i's)(p_0) + i'(n) = (\beta' + i's)(\bar{p_0}) + i'(\bar{n}).$$

Czyli γ jest dobrze określone (i oczywiście jest homomorfizmem).
Sprawdzamy przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{id}_N}\downarrow & & {\scriptstyle \gamma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_M} & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i'} & X' & \xrightarrow{j'} & M & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

$\gamma i(n) = i'(n)$ z definicji γ.

$j'\gamma(\beta(p_0)+i(n)) = j'(\beta'+i's)(p_0)+j'i'(n) = j'\beta'(p_0) = j\beta(p_0) = j(\beta(p_0)+i(n))$.

Stąd $E \equiv E'$ i χ jest "1-1".

Pokazujemy, że χ jest "na".
Dla kocyklu $f : P_1 \to N$ (tzn. $fd_2 = 0$) definiujemy

$$X = P_0 \coprod_{P_1} N := \mathrm{coker}((f, -d_1) : P_1 \to P_0 \oplus N).$$

Dostajemy $i : N \to X$ i z definicji kojądra dostajemy $j : X \to M$ takie, że mamy diagram przemienny, w którym dolny ciąg jest dokładny

$$\begin{array}{ccccccccc}
P_2 & \xrightarrow{d_2} & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \xrightarrow{d_0} & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \mathrm{id}_M\downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{i} & X & \xrightarrow{j} & M & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

Czyli $[f] = \chi(E)$ dla $E : 0 \to N \to X \to M \to 0$ jak wyżej. $\square$

Uwaga 1
W kategoriach abelowych mamy:

1. Produkt włóknisty $f : Y \to X, g : Z \to X$, to $\ker(fp_Y - gp_Z : Y \oplus Z \to X)$, gdzie p_Y, p_Z są rzutowaniami na składniki sumy prostej.

2. Koprodukt włóknisty $f : X \to Y, g : X \to Z$, to $\mathrm{coker}((f, -g) : X \to Y \oplus Z)$.

3. Wyrównywacz $f : X \to Y, g : X \to Y$, to $\ker(f - g)$.

4. Kowyrównywacz $f : X \to Y, g : X \to Y$, to $\mathrm{coker}(f - g)$.

Uwaga 2
Dla $n > 1$, grupy $\mathrm{Ext}^n(M, N)$ są w bijekcji z klasami równoważnych rozszerzeń postaci

$$0 \to N \to X_1 \to X_2 \to \cdots \to X_n \to M \to 0.$$