Teoria modeli ciał, Lista 1

1. Rozważmy zbiór skierowany $(\mathbb{N}_{>0}, |)$. Dla $n|m$ znaleźć homomorfizm $\mathbb{F}_{p^n} \to \mathbb{F}_{p^m}$ taki, że $(\mathbb{F}_{p^n})_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ staje się systemem prostym, którego granicą prostą jest $\mathbb{F}_p^{\mathrm{alg}}$ (algebraiczne domknięcie $\mathbb{F}_p$).
2. Niech $K, L \models \mathrm{ACF}$ i załóżmy, że $|K| = |L| > \aleph_0$. Niech $k \subseteq K, l \subseteq L$ będą podciałami mocy mniejszej od $|K|$ i niech $f : k \to l$ będzie izomorfizmem. Udowodnić, że f przedłuża się do izomorfizmu K z L.
3. Niech p będzie zerem lub liczbą pierwszą. Udowodnić, że ACF_p ma $\aleph_0$ modeli przeliczalnych (z dokładnością do izomorfizmu).
4. Niech T będzie teorią λ-kategoryczną dla każdej nieprzeliczalnej liczby kardynalnej λ. Udowodnić, że jeśli T nie ma modeli skończonych, to jest zupełna.
5. Niech $n, N \in \mathbb{N}$. Napisać L_r-zdanie, które mówi że dla każdej funkcji wielomianowej $f = (f_1, \dots, f_n)$, gdzie $f_1, \dots, f_n$ są wielomianami n zmiennych stopnia co najwyżej N, jeśli f jest 1-1, to f jest na.
6. Niech M będzie modelem monstrum zupełnej teorii T w języku L, $n \in \mathbb{N}$ oraz $a, b \in M^n$. Udowodnić, że:
   (a) $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f : M \cong M$ taki, że $f(a) = b$.
   (b) $\mathrm{qftp}(a) = \mathrm{qftp}(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $f : \langle a\rangle \cong \langle b\rangle$ taki, że $f(a) = b$, gdzie $\langle a\rangle$ jest L-podstrukturą M generowaną przez a.
   (c) T ma QE wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej $n \in \mathbb{N}$ i $a, b \in M^n$ mamy, że $\mathrm{qftp}(a) = \mathrm{qftp}(b)$ implikuje $\mathrm{tp}(a) = \mathrm{tp}(b)$.
7. Niech K będzie dowolnym ciałem, $n \in \mathbb{N}$ i $V \subseteq K[X_1, \dots, X_n]$. Niech $Z(V) := \{a \in K^n \mid (\forall f \in V)(f(a) = 0)\}$. Udowodnić, że:
   (a) Zbiory postaci $Z(V)$ to zbiory domknięte pewnej topologii na K^n.
   (b) Powyższa przestrzeń topologiczna jest noetherowska, tzn. dowolny zstępujący ciąg zbiorów domkniętych stabilizuje się.
   (c) Podprzestrzeń przestrzeni noetherowskiej jest noetherowska.
   (d) Noetherowska przestrzeń topologiczna rozkłada się na skończoną sumę zbiorów domkniętych nierozkładalnych, tzn. takich które nie są nietrywialną sumą podzbiorów domkniętych.
   (e) Podzbiór K^n jest konstruowalny (tzn. jest boolowską kombinacją zbiorów otwartych i domkniętych) wtedy i tylko wtedy, gdy jest definiowalny w $(K, +, \cdot)$ przez formułę bez kwantyfikatorów.