Teoria modeli ciał, Lista 10

1. Niech $(K, \partial) \models \mathrm{DCF}_0$, $V = Z(X^3 - Y^2) \subseteq K^2$, $\pi : TV \to V$ będzie rzutowaniem i $M = Z(X^3 - Y^2, 3X^2X' - 2YY', 9XX'^2 - 4Y'^2) \subseteq K^4$. Udowodnić, że:

   (a) $\pi^{-1}(V \setminus \{(0,0)\}) \subseteq M$,

   (b) $M \subsetneq TV$,

   (c) $\partial_V(V) \subseteq M$.

2. Niech $v_1, \ldots, v_{2n} \in \mathbb{C}^n$ będą liniowo niezależne nad $\mathbb{R}$ i

$$\Gamma := v_1\mathbb{Z} + \ldots + v_{2n}\mathbb{Z}, \quad T := \mathbb{C}^{2n}/\mathbb{Z}.$$

   Udowodnić, że T z topologią ilorazową ma strukturę rozmaitości zespolonej taką, że odwzorowanie ilorazowe $\mathbb{C}^n \to T$ jest holomorficzne.

3. Niech $V \subseteq \mathbb{C}^n$ będzie gładką rozmaitością algebraiczną. Udowodnić, że V z topologią euklidesową ma strukturę rozmaitości zespolonej.

4. Udowodnić, że ciało $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jest definiowalne w strukturze zwartej rozmaitości zespolonej $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

5. Udowodnić, że jeśli ∂ jest różniczkowaniem pierścienia R, to:

   (a) Dla każdych $r, s \in R$ mamy:

$$\partial^{(n)}(rs) = \sum_{i+j=n} \binom{i+j}{i} \partial^{(i)}(r)\partial^{(j)}(s).$$

   (b) Jesli $\mathbb{Q} \subseteq R$, to $(\frac{\partial^{(n)}}{n!})_{n\in\mathbb{N}}$ jest iteratywnym różniczkowaniem Hasse-Schmidta.

6. Niech $\partial = (\partial_i)_{i\in\mathbb{N}}$ będzie różniczkowaniem Hasse-Schmidta na ciele K, $\mathrm{char}(K) = p > 0$ i $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Udowodnić, że:

   (a) Dla każdego $a \in K$ mamy:

$$\partial_n(a^p) = \begin{cases} \partial_{\frac{n}{p}}(a)^p & \text{jeśli } p|n \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

   (b) Jeśli $a \in K^{p^n}$, to $\partial_1(a) = \ldots = \partial_{p^n-1}(a) = 0$.

   (c) Jeśli ∂ jest iteratywne, to $\partial_n^{(p)} = 0$.