Teoria modeli ciał, Lista 11

Niech R będzie pierścieniem i $m, n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $\partial = (\partial_n : R \to R)_{n\in\mathbb{N}}$ i
$$T_\partial : R \to R[\![X]\!], \quad T_\partial(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_n(r) X^n$$
będzie *formalnym rozwinięciem Taylora.* Udowodnić, że ∂ jest HS-różniczkowaniem wtedy i tylko wtedy, gdy T_∂ jest homomorfizmem pierścieni i cięciem $\pi : R[\![X]\!] \to R$, $\pi(F) = F(0)$ (tzn. $\pi \circ T_\partial = \mathrm{id}_R$).

2. Znaleźć homomorfizm pierścieni $c : R[\![X]\!] \to R[\![X_1, X_2]\!]$ taki, że $c(X) = X_1 + X_2$ oraz dla każdego HS-różniczkowania ∂ na R, ∂ jest iteratywne wtedy i tylko wtedy, gdy następujący diagram jest przemienny:
$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{T_\partial} & R[\![X]\!] \\ {\scriptstyle T_\partial}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T'_\partial} \\ R[\![X]\!] & \xrightarrow{c} & R[\![X_1, X_2]\!] \end{array}$$
gdzie $T'_\partial(\sum_n r_n X^n) = \sum_{i,j} \partial_j(r_i) X_1^i X_2^j$. Udowodnić, że T'_∂ jest homomorfizmem pierścieni. Pomyśleć o związku powyższego diagramu z aksjomatem mieszanej łączności działania grupowego.

3. Załóżmy, że R jest dziedziną i ∂ jest HS-różniczkowaniem na R. Udowodnić, że:

   (a) Istnieje jedyne przedłużenie ∂ do HS-różniczkowania na ciele ułamków.
   (b) Jeśli ∂ jest iteratywne, to powyższe przedłużenie też.

   Znaleźć wzory na to przedłużenie.

4. Niech ∂ będzie HS-różniczkowaniem na R oraz $r_1, \ldots, r_m \in R$. Udowodnić, że:
$$\partial_n(r_1 \cdot \ldots \cdot r_m) = \sum_{i_1+\ldots+i_m=n} \partial_{i_1}(r_1) \cdot \ldots \cdot \partial_{i_m}(r_m).$$

5. Udowodnić, że istnieje jedyne HS-różniczkowanie ∂_X na $R[X]$ takie, że dla $n > 0$ mamy $\partial_{X,n}(R) = \{0\}$ oraz $\partial_{X,1}(X) = 1$ i dla $n > 1$ mamy $\partial_{X,n}(X) = 0$.

6. Udowodnić, że ∂_X jest iteratywne.

7. Dla danego wielomianu $f \in R[X]$ obliczyć $\partial_{X,n}(f)$.

8. Udowodnić, że $\bigcap_{n>0} \ker(\partial_{X,n}) = R$ (stałe ∂_X to stałe wielomiany!).