Teoria modeli ciał, Lista 12

Niech $A \subseteq B$ będzie rozszerzeniem pierścieni i $m \in \mathbb{N}$.

1. Załóżmy, że $I \lhd A$ składa się z elementów nilpotentnych. Weźmy $a \in A$ taki, że $a + I \in (A/I)^*$. Udowodnić, że $a \in A^*$.

2. Udowodnić, że w definicji gładkiej algebry można warunek $N^2 = 0$ zastąpić warunkiem $(\exists m \in \mathbb{N}_{>0})(N^m = 0)$.

3. Niech $S \subset A$ będzie systemem multyplikatywnym. Udowodnić, że A_S jest etalny nad A.

4. Niech ∂ będzie HS-różniczkowaniem rzędu m na A i ∂' będzie HS-różniczkowaniem rzędu m na B. Udowodnić, że ∂' rozszerza ∂ wtedy i tylko wtedy, gdy następujący diagram jest przemienny:
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "T_\partial"] \arrow[d, "\subseteq"'] & A[X]/(X^{m+1}) \arrow[d, "\subseteq"'] \\ B \arrow[r, "T_{\partial'}"] & B[X]/(X^{m+1}) \end{tikzcd}$$

5. Załóżmy, że B jest etalny nad A i że ∂ jest HS-różniczkowaniem na A. Udowodnić, że:

   (a) Istnieje jedyne rozszerzenie ∂ do HS-różniczkowania ∂' na B.
   (b) Jeśli ∂ jest iteratywne, to ∂' jest iteratywne.

6. Załóżmy, że B jest gładki nad A i że $(\partial_0, \ldots, \partial_m)$ jest HS-różniczkowaniem rzędu m na B takim, że $\partial_{>0}$ znika na A. Udowodnić, że $(\partial_0, \ldots, \partial_m)$ przedłuża się do HS-różniczkowania na B (też zerowego na A).

7. Załóżmy, że $K \subseteq L$ jest algebraicznym i rozdzielczym rozszerzeniem ciał. Udowodnić, że L jest etalne nad K.

8. Załóżmy, że K jest ciałem charakterystyki $p > 0$ i B jest p-niezależnym podzbiorem K. Udowodnić, że:

   (a) B jest p-bazą wtedy i tylko wtedy, gdy $K = K^p[B]$.
   (b) Jeśli B jest p-bazą, to B jest algebraicznie niezależny nad $\mathbb{F}_p$.

9. Niech k będzie podciałem ciał K i L, które są podciałami ciała M. Załóżmy, że istnieje baza K nad k, która jest L-niezależna. Udowodnić, że poniższe odwzorowanie jest izomorfizmem K-algebr:
$$K \otimes_k L \ni \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in K[L].$$