Teoria modeli ciał, Lista 13

Niech k będzie podciałem ciał K i L, które są podciałami $M = M^{\mathrm{alg}}$. Niech p będzie liczbą pierwszą i $e, n \in \mathbb{N}$.

1. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) K jest liniowo rozłączne z L nad k,
   (b) L jest liniowo rozłączne z K nad k,
   (c) Istnieje baza K nad k, która jest liniowo niezależna nad L.
   (d) Jeśli L jest ciałem ułamków R, to dla każdego $B \subseteq R$, jeśli B jest k-niezależny, to B jest K-niezależny.

2. Niech $\mathrm{char}(k) = p$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) K jest liniowo rozłączne z $k^{p^{-\infty}}$ nad k.
   (b) K jest liniowo rozłączne z $k^{p^{-1}}$ nad k.
   (c) Dla każdych $a_1, \ldots, a_n \in K$, rozszerzenie $k \subseteq k(a_1, \ldots, a_n)$ jest rozdzielczo generowane.
   (d) Istnieje p-baza k, która jest p-niezależna w K.
   (e) Każdy zbiór p-niezależny w k pozostaje p-niezależny w K.

3. Udowodnić, że jeśli k jest doskonałe, to $k \subseteq K$ jest rozdzielcze.

4. Znaleźć przykład rozdzielczego rozszerzenia $k \subseteq K$ stopnia przestępnego 1, które nie jest rozdzielczo generowane.

5. Załóżmy, że rozszerzenie $k \subseteq K$ jest algebraiczne rozdzielcze. Udowodnić, że jeśli B jest p-bazą k, to B jest p-bazą K.

6. Napisać aksjomaty następujących teorii: $\mathrm{SCF}_{p,e}$, $\mathrm{SCF}'_{p,e}$, $\mathrm{SCF}^{\lambda}_{p,e}$.

7. Udowodnić, że $\mathrm{SCF}^{\lambda}_{p,e}$ jest zupełna i modelowo zupełna.

8. Załóżmy, że $a \in L^n$ oraz że L jest liniowo rozłączne z K^{alg} nad K. Udowodnić, że:
$$I_{K^{\mathrm{alg}}}(a) = (I_K(a))K^{\mathrm{alg}}.$$

9. Załóżmy, że nierozkładalny podzbiór domknięty Zariskiego $V \subseteq M^n$ jest zdefiniowany nad K. Udowodnić, że zbiór $V \cap (K^{\mathrm{sep}})^n$ jest gęsty Zariskiego w V.