Teoria modeli ciał, Lista 14

Niech p będzie liczbą pierwszą, $e, n \in \mathbb{N}$, $M \models \mathrm{SCF}^{\lambda}_{p,e}$ będzie modelem monstrum, $b = \{b_1, \ldots, b_e\}$ wyróżnioną p-bazą M i $K \preccurlyeq M$.

1. Udowodnić, że dla każdego $x \in M$ mamy:

$$x = \sum_{j \in (p^e)^n} x_j^{p^n} b^j.$$

2. Niech $y \in M$, $\bar{z} \subseteq M$. Udowodnić, że jeśli $y \in K(\bar{z})^{\mathrm{sep}}$, to wtedy $y_{\leqslant n} \subseteq K(\bar{z}_{\leqslant n}, y)$.

3. Udowodnić, że jeśli $X \subseteq M^n$ jest definiowalny i nieskończony, to $\mathrm{RM}(X) = \infty$.

4. Niech $\bar{x} \subseteq M$. Udowodnić, że:

   (a) $\mathrm{acl}(\bar{x}) = \mathbb{F}_p(\bar{x}_\infty, b)^{\mathrm{sep}}$,

   (b) $\mathrm{dcl}(\bar{x}) = \mathbb{F}_p(\bar{x}_\infty, b)$.

5. Niech $\{m_0, \ldots, m_{p^e-1}\} = \Gamma_b$. Ideał $I \lhd K[X_\infty]$ jest *rozdzielczy*, gdy dla każdych $f_0, \ldots, f_{p^e-1} \in K[X_\infty]$ mamy:

$$\sum_{j=0}^{p^e-1} f_j^p m_j \in I \quad \Longrightarrow \quad f_0, \ldots, f_{p^e-1} \in I.$$

   Definiujemy też:

$$I_0 := \langle \{X_i - \sum_{j=0}^{p^e-1} X_{(i,j)}^p m_j \mid i \in p^\infty\} \rangle \lhd K[X_\infty].$$

   Udowodnić, że obrazem $S_1(K)$ przy odwzorowaniu

$$S_1(K) \ni \mathrm{tp}(a/K) \mapsto I_K^\lambda(a) \lhd K[X_\infty]$$

   jest zbiór ideałów pierwszych rozdzielczych $K[X_\infty]$ zawierających I_0.