Teoria modeli ciał, Lista 2

Niech $K \models \mathrm{ACF}_p$ będzie modelem monstrum, M modelem monstrum zupełnej teorii w języku L, $k \subseteq K$ podciałem, $A \subseteq M$ i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech R będzie pierścieniem i dla $I \trianglelefteq R$, niech
$$V(I) = \{P \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq P\}.$$
Udowodnić, że:
   (a) Zbiory postaci $V(I)$ to zbiory domknięte pewnej topologii na $\mathrm{Spec}(R)$.
   (b) Punkt $P \in \mathrm{Spec}(R)$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in \mathrm{Max}(R)$.

2. Udowodnić, że odwzorowanie
$$\Psi : k^n \to \mathrm{Spec}(k[X_1, \dots, X_n]), \ \ \Psi(a_1, \dots, a_n) = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$
jest homeomorfizmem pomiędzy k^n (z topologią Zariskiego) a $\Psi(k^n)$ (z topologią podprzestrzeni $\mathrm{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$).

3. Niech $V \subseteq K^n$ będzie zbiorem k-domkniętym. Udowodnić, że V jest k-nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I_k(V) \in \mathrm{Spec}(k[X_1, \dots, X_n])$.

4. Niech $A \subseteq K$ i $K_0 \subseteq K$ będzie podciałem prostym. Udowodnić, że:
   (a) $a \in \mathrm{acl}(A) \ \Leftrightarrow \ a \in K_0(A)^{\mathrm{acl}}$.
   (b) $a \in \mathrm{dcl}(A) \ \Leftrightarrow \ a \in K_0(A)^{p^{-\infty}}$, gdzie $K_0(A)^{0^{-\infty}} = K_0(A)$.

5. Niech $X = \varphi(\bar{x})^M$ dla $\varphi(\bar{x}) \in L(A)$. Załóżmy, że dla każdych zbiorów A-definiowalnych X_1, X_2 jeśli $X = X_1 \dot\cup X_2$, to $\mathrm{RM}(X_1) < \mathrm{RM}(X)$ lub $\mathrm{RM}(X_2) < \mathrm{RM}(X)$. Udowodnić, że typ
$$\{\varphi(\bar{x}) \wedge \neg\psi(\bar{x}) \mid \psi(\bar{x}) \in L(A), \ \mathrm{RM}(\psi(\bar{x})) < \mathrm{RM}(X)\}$$
implikuje typ zupełny nad A.

6. Dowieść, że jeśli istnieje definiowalna w M surjekcja $f : X \to Y$ taka, że dla każdego $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ jest skończone, to $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(Y)$.

7. Dowieść, że jeśli $a_1, \dots, a_n, b \in M$ oraz $b \in \mathrm{acl}(a_1, \dots, a_n)$, to wtedy $\mathrm{RM}(a_1, \dots, a_n, b) = \mathrm{RM}(a_1, \dots, a_n)$.

8. Niech M będzie silnie minimalny. Udowodnić, że dla każdej formuły $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $a \in M^n$, jeśli $|\varphi(x, a)^M| > N$, to $|\varphi(x, a)^M| = \infty$.