Teoria modeli ciał, Lista 3

Niech $K \models \mathrm{ACF}_p$ będzie modelem monstrum, M modelem monstrum zupełnej teorii w języku L, $k \subseteq K$ podciałem, $A \subseteq M$ i $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Dowieść, że jeśli istnieje definiowalna w M surjekcja $f : X \to Y$ taka, że dla każdego $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ jest skończone, to $\mathrm{RM}(X) = \mathrm{RM}(Y)$.

2. Załóżmy, że T jest silnie minimalna i $a_1, \ldots, a_n \in M$. Udowodnić, że $\mathrm{RM}(a_1, \ldots, a_n) = \dim_{\mathrm{acl}}(a_1, \ldots, a_n)$.

3. Niech R będzie dziedziną, $R_0 \subseteq K$ rozszerzeniem ciał oraz elementy $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in K$ będą algebraiczne nad R_0. Udowodnić, że jeśli homomorfizm
$$\phi : R[a_1, \ldots, a_n] \to R[b_1, \ldots, b_n]$$
spełnia $\phi|_R = \mathrm{id}_R$ oraz $\phi(a_1) = b_1, \ldots, \phi(a_n) = b_n$, to ϕ jest izomorfizmem.

4. Niech $X \subseteq M^n$ będzie A-definiowalny i $\mathrm{RM}(X) = \alpha$. Udowodnić, że:
   (a) Istnieje jedyny $p \in S_n(A)$ taki, że $\mathrm{RM}(p) = \alpha$ oraz "$x \in X$" $\in p$ wtedy i tylko wtedy, gdy X nie jest rozłączną sumą dwóch A-definiowalnych podzbiorów rangi Morley'a równej α.
   (b) Zbiór X spełnia powyższe warunki dla każdego $B \supseteq A$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{mlt}(X) = 1$.
   (c) Jeśli $\mathrm{mlt}(X) = 1$ oraz $Y \subseteq M^n$ jest definiowalny i $\mathrm{RM}(Y) < \alpha$, to $\mathrm{mlt}(X \cup Y) = 1$.

5. Załóżmy, że $k \models \mathrm{ACF}_p$ i $V \subseteq K^n$ jest k-domknięty. Udowodnić, że V jest k-nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy V jest nierozkładalny.

6. Niech $V \subseteq K^n$ będzie domknięty i nierozkładalny. Udowodnić, że
$$\mathrm{RM}(V) = \dim_{\mathrm{top}}(V).$$

7. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Dla każdego $a \in M^{\mathrm{eq}}$ istnieje $b \in M^n$ taki, że $\mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(a) = \mathrm{dcl}^{\mathrm{eq}}(b)$.
   (b) Dla każdego zbioru definiowalnego $X \subseteq M^m$ istnieje $c \in M^n$ taki, że dla $\phi \in \mathrm{Aut}(M)$, $\phi(c) = c$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi(X) = X$.
   (c) Dla każdej 0-definiowalnej relacji równoważności E na M^n istnieje funkcja definiowalna $f : M^n \to M^m$ taka, że dla $x, y \in M^n$, $f(x) = f(y)$ wtedy i tylko wtedy, gdy xEy.

8. Znaleźć definiowalną relację równoważności na K, dla której nie ma definiowalnego zbioru reprezentantów klas abstrakcji.