Teoria modeli ciał, Lista 4

Niech $K \models \mathrm{ACF}_p$, k będzie podciałem K i (R, ∂) pierścieniem różniczkowym.

1. Niech
$$\delta : R \to R, \quad \bar{\delta} : R \to R[X]/(X^2), \quad \bar{\delta}(r) = r + \delta(r)(X + (X^2)).$$
Udowodnić, że δ jest różniczkowaniem wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\delta}$ jest homomorfizmem.

2. Niech R będzie dziedziną. Udowodnić, że ∂ przedłuża się jednoznacznie do różniczkowania na R_0.

3. Niech $\mathrm{char}(R) = p > 0$ i C będzie pierścieniem stałych $(R[X], \partial_X)$. Udowodnić, że $C = R[X^p]$.

4. Niech $r \in R$ i $f \in R\{X\}$. Udowodnić, że $\partial(f(r)) = \partial(f)(r)$.

5. Udowodnić, że jądro ∂-homomorfizmu jest ∂-ideałem.

6. Niech I będzie ∂-ideałem w R. Udowodnić, że istnieje jedyne różniczkowanie na R/I takie, że homomorfizm ilorazowy jest ∂-homomorfizmem.

7. Sformułować i udowodnić zasadnicze twierdzenie o ∂-homomorfizmach.

8. Niech $\mathrm{char}(R) \neq 2$. Udowodnić, że ideał $\langle (X'')^2 - 2X' \rangle$ w $R\{X\}$ nie jest pierwszy.

9. Niech $V \subseteq K^n$ będzie domknięty. Udowodnić, że istnieje podciało $k_V \subseteq K$ takie, że:
   (a) V jest zdefiniowany nad k_V,
   (b) Jeśli V jest zdefiniowany nad k, to $k_V \subseteq k$.

10. Niech V, k_V będą jak wyżej i c będzie kanoniczną definicją V. Udowodnić, że $\mathrm{dcl}(c) = k_V^{p^{-\infty}}$ (patrz zad. 4 lista 2).