Teoria modeli ciał, Lista 5

Niech (R, ∂) będzie pierścieniem różniczkowym i $(K, \partial) \subseteq (L, \partial)$ rozszerzeniem ciał różniczkowych. Załóżmy, że $\mathrm{char}(R) = \mathrm{char}(K) = 0$.

1. Udowodnić, że dla $A \subseteq R$ mamy
$$\langle A \rangle = (\{\partial^{(n)}(a) \mid a \in A,\ n \in \mathbb{N}\}).$$

2. Udowodnić, że dla $a \in L$ mamy:
$$\mathrm{RD}(I(a/K)) = \mathrm{trdeg}_K\, K\langle a \rangle.$$

3. Napisać formalnie aksjomaty DCF_0.

4. Udowodnić, że jeśli R jest dziedziną, to istnieje różniczkowe rozszerzenie $(R, \partial) \subseteq (M, \partial)$ takie, że $(M, \partial) \models \mathrm{DCF}_0$.

5. Niech $P \in \mathrm{Spec}(K\{X\})$ będzie ∂-ideałem, $f \in P,\ g \in K\{X\} \setminus P$ oraz $a := X + P \in K\{X\}/P$. Rozważamy $K\{X\}/P$ z różniczkowaniem ilorazowym i utożsamiamy K z podciałem różniczkowym $K\{X\}/P$. Udowodnić, że $f(a) = 0,\ g(a) \neq 0$.

6. Niech $g \in K\{X\}$ będzie nierozkładalny rzędu n oraz $\alpha \in L$ taki, że $\mathrm{trdeg}_K\, K\langle \alpha \rangle = n$. Udowodnić, że jeśli $g(\alpha) = 0$, to g jest wielomianem minimalnym $I(\alpha/K)$ (tzn. dla każdego $f \in I(\alpha/K) \setminus \{0\}$ nieprawdą jest, że $f \ll g$).

7. Niech C będzie ciałem stałych (K, ∂). Udowodnić, że
$$C = C^{\mathrm{alg}}(K)(:= \{a \in K \mid a \text{ jest algebraiczny nad } C\}).$$

8. Udowodnić, że jeśli K_0 jest podciałem prostym K, to $\partial|_{K_0} = 0$.

9. Niech $K, L \models \mathrm{DCF}_0$ będą ω-nasycone i $k \subseteq K$, $l \subseteq L$ będą przeliczalnymi podciałami różniczkowymi. Załóżmy, że istnieje ∂-izomorfizm $\Phi : k \to l$. Udowodnić, że istnieją K_ω, L_ω takie, że
$$k \subseteq K_\omega \preccurlyeq K, \quad l \subseteq L_\omega \preccurlyeq L$$
oraz ∂-izomorfizm $\Psi : K_\omega \to L_\omega$ taki, że $\Psi|_k = \Phi$.

10. Zbadać, w których zadaniach założenie o charakterystyce 0 było istotne.