Teoria modeli ciał, Lista 6

Niech (K, ∂) będzie modelem monstrum DCF_0, $k \subseteq K$ podciałem różniczkowym, $A \subset K$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $a, b \in K^n$. Udowodnić, że $I_k(a) = I_k(b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{tp}(a/k) = \mathrm{tp}(b/k)$.

2. Udowodnić, że poniższa funkcja
$$S_n(k) \ni \mathrm{tp}(a/k) \mapsto I_k(a) \in \mathrm{Spec}_\partial(k\{X_1, \ldots, X_n\})$$
jest bijekcją.

3. Udowodnić, że $\mathrm{RM}((\partial^{(n)})^{-1}(0)) = n$.

4. Niech $L \subseteq M$ będzie rozszerzeniem ciał algebraicznie domkniętych i $V \subseteq M^n$ będzie M-domknięty. Udowodnić, że $M \cap L^n$ jest L-domknięty.

5. Udowodnić, że:
   (a) $\mathrm{acl}(A) = \mathbb{Q}\langle A\rangle^{\mathrm{alg}}$,
   (b) $\mathrm{dcl}(A) = \mathbb{Q}\langle A\rangle$.

6. Udowodnić, że pochodna logarytmiczna
$$l\partial : K^* \to K, \quad l\partial(x) = \frac{\partial(x)}{x}$$
jest surjekcją.

7. Niech L bedzie ciałem nieskończonym i $f \in L[X](\frac{1}{X})$ będzie taki, że odpowiadająca mu funkcja $L^* \to (L, +)$ jest homomorfizmem. Udowodnić, że $f = 0$.

8. Niech $C, D \subseteq K\{X_1, \ldots, X_n\}$ i załóżmy, że $\sqrt{\langle C\rangle} = \sqrt{\langle D\rangle}$. Udowodnić, że $Z(C) = Z(D)$.

9. Niech $I_n := \langle X^2, \ldots, X^{(n)2}\rangle \lhd K\{X\}$. Udowodnić, że wstępujący ciąg ideałów
$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq \ldots$$
nie stabilizuje się. Wywnioskować, że ideał $\bigcup I_n$ nie jest skończenie generowany jako ideał różniczkowy.

10. Niech (R, ∂) będzie pierścieniem różniczkowym, I radykalnym ideałem różniczkowym w R i $ab \in I$. Udowodnić, że $a\partial(b), b\partial(a) \in I$.