

Teoria modeli ciał, Lista 7

Niech (K, ∂) będzie modelem monstrum DCF_0 , $k \subseteq K$ podciałem różniczkowym, R pierścieniem różniczkowym i $n \in \mathbb{N}$.

1. Niech $f, g \in k[X]$, $\lambda \in k$ i załóżmy, że

$$\lambda f = X \frac{\partial f}{\partial X}, \quad X^n | X \frac{\partial g}{\partial X} - ng.$$

Udowodnić, że:

- (a) $\lambda = \deg(f)$ i $f = bX^\lambda$ dla pewnego $b \in k$,
 (b) $X^n | g$.

2. Niech $f \in R[X]$ i $r \in R$. Udowodnić, że:

$$\partial(f(r)) = \frac{\partial f}{\partial X}(r) \cdot \partial(r) + f^\partial(r).$$

3. Niech $f \in R\{X\}$ i $\text{ord}(f) = n$. Udowodnić, że:

$$\partial(f) = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial X^{(i)}} X^{(i+1)} + f^\partial.$$

4. Załóżmy, że dla $f \in k\{X\}$ ideał $\langle f \rangle$ jest pierwszy. Udowodnić, że $\langle f \rangle = I(f)$.

5. Udowodnić, że $\langle X''X - X' \rangle \in \text{Spec}_\partial(K\{X\})$.

6. Niech $A \subseteq R$, $a \in R$ i załóżmy, że ideał $\sqrt{\langle A \cup \{a\} \rangle}$ jest skończenie generowany jako radykalny ideał różniczkowy. Udowodnić, że istnieją $m \in \mathbb{N}$ i $a_1, \dots, a_m \in A$ takie, że $\sqrt{\langle A \cup \{a\} \rangle} = \sqrt{\langle a, a_1, \dots, a_m \rangle}$.

7. Niech $V_1, V_2 \subseteq k^n$ będą zbiorami domkniętymi Kolchina i $A \subseteq k^n$. Udowodnić, że:

- (a) $I_k(A)$ jest radykalnym ideałem różniczkowym,
 (b) $V_1 \subsetneq V_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $I_k(V_1) \supsetneq I_k(V_2)$,
 (c) V_1 jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $I_k(V_1)$ jest pierwszy,
 (d) $V_1 \cup V_2$ jest domknięty Kolchina.

8. Niech $A \subseteq K\{X_1, \dots, X_n\}$. Udowodnić, że $I_K(Z(A)) = \sqrt{\langle A \rangle}$.

9. Załóżmy, że $k \models \text{DCF}_0$ i $p \in S_n(k)$. Udowodnić, że V_p jest nierozkładalny.