Teoria modeli ciał, Lista 8

Niech X i Y będą silnie minimalnymi zbiorami 0-definiowalnymi w $M \models T$.

1. Załóżmy, że istnieją elementy $a \in X \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$, $b \in Y \setminus \mathrm{acl}(\emptyset)$ takie, że $\mathrm{acl}(a) = \mathrm{acl}(b)$. Udowodnić, że

   (a) Istnieje 0-definiowalny zbiór $R \subset X \times Y$ taki, że oba rzutowania mają skończone włókna i koskończone obrazy.

   (b) X jest trywialny wtedy i tylko wtedy, gdy Y jest trywialny. Podobnie dla modularności i lokalnej modularności.

2. Załóżmy, że X interpretuje grupę. Udowodnić, że X nie jest trywialny.

3. Załóżmy, że X jest trywialny. Udowodnić, że X jest modularny.

4. Udowodnić, że jeśli $T = \mathrm{ACF}_p$, to X nie jest lokalnie modularny.

5. Znaleźć teorię T w języku funkcji ternarnej taką, że T ma modele nieskończone i jeśli $(M, f) \models T$, to dla każdego $m \in M$ i dla

   $$m_1 \cdot_m m_2 := f(m, m_1, m_2)$$

   struktura $(M, \cdot_m)$ jest grupą z elementem neutralnym m.

6. Niech $\mathbf{M} = (M, +, \lambda_k)_{k \in K}$ będzie modelem monstrum teorii przestrzeni liniowych nad ciałem K i $A \subseteq M$. Udowodnić, że:

   $$\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A) = \langle A \rangle = \mathrm{Lin}_K(A),$$

   gdzie $\mathrm{Lin}_K(A)$ jest podprzestrzenią liniową $\mathbf{M}$ generowaną przez A.

7. Dla $\mathbf{M}$ jak w 6. znaleźć funkcje definiowalne f_i takie, że w strukturze $(M, f_i)_i$ dla $A \subseteq M$ mamy:

   $$\mathrm{dcl}(A) = \mathrm{acl}(A) = \langle A \rangle = \mathrm{Aff}_K(A),$$

   gdzie $\mathrm{Aff}_K(A)$ jest podprzestrzenią afiniczną $\mathbf{M}$ generowaną przez A. Znaleźć aksjomaty $\mathrm{Th}((M, f_i)_i)$.

8. Niech $(K, \partial) \models \mathrm{DCF}_0$, $C = \partial^{-1}(0)$ i $V \subseteq K^n$ będzie zbiorem domkniętym Zariskiego nierozkładalnym i zdefiniowanym nad $k \subseteq K$. Udowodnić, że:

   (a) Jeśli $k \subseteq C$, to $T^{\partial}V = TV$.

   (b) Istnieje $v \in V$, taki że $\mathrm{td}_k(\partial_V(v)) = 2\dim(V)$.

   Powyższy dim jest wymiarem z geometrii algebraicznej ($= \mathrm{RM}_{\mathrm{ACF}_0}$)).