Teoria modeli ciał, Lista 9

Niech $(K, \partial) \models \mathrm{DCF}_0$, k będzie podciałem różniczkowym K, $n \in \mathbb{N}$, dla $v = (v_1, \ldots, v_n) \in K^n$ niech $\partial(v) := (\partial(v_1), \ldots, \partial(v_1))$ i $X = (X_1, \ldots, X_n)$.

1. Dla $S \in k[X]^n$ definiujemy różniczkowanie ∂_S na $k[X]$ które przedłuża ∂ i $\partial_S(X) = S$. Załóżmy, że $f \in k[X]$ i $v \in K^n$. Udowodnić, że:
   (a) $\partial_S(f) = \partial(f)(X, S)$.
   (b) Jeśli $\partial(v) = S(v)$ i $m \in \mathbb{N}$, to $\partial^{(m)}(v) = \partial_S^{(m)}(X)(v)$.
2. Załóżmy, że $v \in K^n$ i $\partial(v) \in k(v)^{\mathrm{alg}}$. Udowodnić, że $k\langle v\rangle = k(v, \partial(v))$.
3. Udowodnić, że jeśli $v \in K^n$ i $\mathrm{td}_k\, k\langle v\rangle < \omega$, to istnieje ∂-rozmaitość (V, s) definiowalna nad k, $m \in \mathbb{N}$ i $g \in k[\bar{X}]$ takie, że
$$(v, \partial(v), \ldots, \partial^{(m)}(v), \frac{1}{g(v, \partial(v), \ldots, \partial^{(m)}(v))}) \in (V, s)^\sharp.$$
4. Dla $p \in S_n(k)$ udowodnić, że $\mathrm{RM}(p) \in \mathbb{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{RD}(p) \in \mathbb{N}$.
5. Niech (V, s) będzie ∂-rozmaitością, $\mathcal{W} \subseteq V^\sharp$ zbiorem domkniętym Kolchina i W domknięciem Zariskiego $\mathcal{W}$. Udowodnić, że:
   (a) $W \cap V^\sharp = \mathcal{W}$.
   (b) W jest *∂-podrozmaitością* (V, s), tzn. $s(W) \subseteq T^\partial W$.
   (c) $W^\sharp = \mathcal{W}$.
   (d) Jeśli $\mathcal{W}$ jest nierozkładalny Kolchina, to W jest nierozkładalny Zariskiego.
6. Niech $V \subseteq K^n$ będzie k-domknięty Zariskiego, $\mathcal{V} \subseteq V$ k-domknięty Kolchina i gęsty Zariskiego w V. Załóżmy, że $a \in \mathcal{V}$ jest taki, że $I_k\langle a\rangle = I_k\langle\mathcal{V}\rangle$ (ideały w $k\{X\}$). Udowodnić, że $I_k(a) = I_k(V)$ (ideały w $k[X]$).
7. Niech $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(K)$. Dla $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ niech
$$U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}.$$
   Utożsamiamy U_i z K^n w standardowy sposób. Udowodnić, że:
   (a) Istnieje funkcja $\partial_{\mathbb{P}^n} : \mathbb{P}^n \to T\mathbb{P}^n$ taka, że obcięcie $\partial_{\mathbb{P}^n}$ do każdego U_i pokrywa się z ∂_{K^n}.
   (b) Powiemy, że $A \subseteq \mathbb{P}^n$ jest *domknięty Kolchina w* $\mathbb{P}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy $A \cap U_i$ jest domknięty Kolchina w K^n. Udowodnić, że zbiory domknięte Kolchina w $\mathbb{P}^n$ są zbiorami domkniętymi pewnej topologii noetherowskiej na $\mathbb{P}^n$.