Pierścienie Dedekinda, Lista 1

R, T są pierścieniami (przemiennymi z 1). $\mathrm{Spec}(R)$ to zbiór ideałów pierwszych R, $\mathrm{Max}(R)$ to zbiór ideałów maksymalnych R.

1. Udowodnić, że pierścień z jednoznacznym rozkładem jest normalny.

2. Załóżmy, że R jest dziedziną. Udowodnic, że R jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $P \in \mathrm{Spec}(R)$ pierścień R_P jest normalny.

3. Niech $R := \mathbb{C}[X, Y]/(X^2 - Y^3)$. Traktujemy R jako rozszerzenie $\mathbb{C}$ w naturalny sposób.

   (a) Udowodnić, że R nie jest normalny.

   (b) Znaleźć $t \in R_0$ taki, że $\mathbb{C}[t]$ jest normalizacją R.

   (c) Zastanowić się nad interpretacją geometryczną (b).

4. Niech K będzie ciałem, $\mathrm{char}(K) \neq 2$ i $f \in K[X]\backslash K$ będzie niepodzielny przez kwadrat żadnego wielomianu dodatniego stopnia. Udowodnić, że $K[X, \sqrt{f}]$ jest całkowitym domknięciem $K[X]$ w $K(X, \sqrt{f})$.

5. Niech $d \in \mathbb{Z}$ będzie niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby pierwszej. Udowodnić, że całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ jest:

   (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, jeśli $d \equiv 3 \pmod 4$;

   (b) $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$, jeśli $d \equiv 1 \pmod 4$.

6. Niech p będzie liczbą pierwszą i $\zeta_p \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$ będzie p-tym pierwiastkiem z 1. Udowodnić, że $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ jest całkowitym domknięciem $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

7. Znaleźć przykład rozszerzenia $R \subseteq T$ i ideału $I \lhd T$ takiego, że:

   (a) $I \in \mathrm{Max}(T)$, ale $I \cap R \notin \mathrm{Max}(R)$.

   (b) $I \in \mathrm{Spec}(T) \setminus \mathrm{Max}(T)$, ale $I \cap R \in \mathrm{Max}(R)$.

   (c) $R \subseteq T$ jest całkowite, $I \notin \mathrm{Max}(T)$, ale $I \cap R \in \mathrm{Max}(R)$.