Pierścienie Dedekinda, Lista 10

Proponowany termin egzaminu: 29 stycznia, 16.30 – 19.00.

R jest dziedziną i $K = R_0$.

1. Udowodnić, że normalizacja R jest przekrojem wszystkich pierścieni waluacyjnych w K zawierających R.

2. Niech $v : K^* \to A$ będzie waluacją i $K \subseteq L$ rozszerzeniem ciał. Udowodnić, że istnieje rozszerzenie abelowych grup uporządkowanych $A \subseteq A'$ i waluacja $v' : L \to A'$, taka że $v'|_K = v$.

3. Niech ϕ będzie normą na K taką, że dla każdych $a, b \in K$ mamy $\phi(a + b) \leqslant C(\phi(a) + \phi(b))$. Udowodnić, że:

   (a) $C \geqslant 1$.

   (b) Dla każdej $\alpha \in (0, \infty)$ funkcja ϕ^α jest też normą.

   (c) Jeśli K jest skończone, to ϕ jest trywialna.

4. Niech v będzie waluacją dyskretną (tzn. o wartościach w $\mathbb{Z}$) na K. Udowodnić, że:

   (a) $R_{\hat{v}} = \mathrm{cl}_{\hat{K}}(R_v)$ (topologiczne domknięcie w $\hat{K}$),

   (b) $R_{\hat{v}} \cong \widehat{(R_v, \mathfrak{m}_v)}$.

5. Niech R będzie UFD, $p \in R$ elementem pierwszym i v_p valuacją p-adyczną na K. Udowodnić, że:

   (a) $R_{v_p} = R_{(p)}$,

   (b) Jeśli R jest PID, to $R_{\widehat{v_p}} \cong \widehat{(R, (p))}$.

6. Niech R będzie pierścieniem Dedekinda, $P \in \mathrm{Max}(R)$ i v_P valuacją P-adyczną na K. Udowodnić, że:

   (a) $R_{v_P} = R_P$,

   (b) $R_{\widehat{v_p}} \cong \widehat{(R, P)}$.