Pierścienie Dedekinda, Lista 11

Niech v będzie nietrywialną waluacją dyskretną na ciele K, $\mathcal{O}_v$ to pierścień waluacji v, $\mathfrak{m}_v$ maksymalny ideał w $\mathcal{O}_v$ oraz $k_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$.

1. Udowodnić, że $\mathcal{O}_v$ jest zwarty (gdy k_v jest skończone) i K nie jest zwarte.

2. Udowodnić, że jesli $v_1, \ldots, v_n$ są waluacjami dyskretnymi na K, to pierścień $\mathcal{O}_{v_1} \cap \ldots \cap \mathcal{O}_{v_n}$ jest PID.

3. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem elementów z K. Udowodnić, że:

   (a) Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $a_{n+1} - a_n \to 0$.

   (b) Ciąg $(\sum_{n=1}^{m} a_n)_{m\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to 0$.

4. Niech v będzie waluacją p-adyczną na $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ jest zbiorem reprezentantów ($\mathbb{F}_p$ w $\mathbb{Z}_{(p)}$).

5. Udowodnić, że

$$\mathbb{Q}_p = \{\sum_{n=r}^{\infty} a_n p^n \mid r \in \mathbb{Z},\ a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}\}.$$

6. Załóżmy, że $\mathrm{char}(k_v) = p > 0$, $a, b \in \mathcal{O}_v$ i $v(a-b) \geqslant n > 0$. Udowodnić, że dla $k \in \mathbb{N}$ mamy $v(a^{p^k} - b^{p^k}) \geqslant n + k$.

7. Załóżmy, że K jest zupełne i $|k_v| = q$. Udowodnić, że:

   (a) Pierwiastek pierwotny z 1 stopnia $q-1$ należy do K.

   (b) Zbiór
   $$\{a \in K \mid a = 0 \text{ lub } a^{q-1} = 1\}$$
   jest zbiorem reprezentantów (k_v w $\mathcal{O}_v$).

8. Udowodnić, że jeśli pierwiastek pierwotny z 1 stopnia n należy do $\mathbb{Q}_p$ i $p \nmid n$, to $n | p-1$.