Pierścienie Dedekinda, Lista 12

(K, v) jest zupełne, $v(K) = \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_v$ to pierścień waluacji v, $\mathfrak{m}_v$ maksymalny ideał w $\mathcal{O}_v$, $k_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v$, $q : \mathcal{O}_v \to k_v$ to homomorfizm ilorazowy i $n \in \mathbb{N}$.

1. Udowodnić, że jeśli $\mathrm{char}(k_v) \neq 2$ i $a \in (\mathcal{O}_v)^*$, to $a = b^2$ dla pewnego $b \in (\mathcal{O}_v)^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q(a) = c^2$ dla pewnego $c \in (k_v)^*$.

2. Udowodnić, że jeśli $a \in (\mathbb{Q}_2)^*$, to $a = b^2$ dla pewnego $b \in (\mathbb{Q}_2)^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v_2(a-1) \geqslant 3$.

3. Udowodnić, że jeśli $f \in \mathcal{O}_v[X]$ jest nierozkładalny i unormowany, to $q(f) \in k_v[X]$ jest potęgą wielomianu nierozkładalnego.

4. Udowodnić, że jeśli $f \in K[X]$ jest nierozkładalny i unormowany, to:
$$v(f(0)) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; v(f(-1)) \geqslant 0.$$

5. Udowodnić, że jeśli k jest ciałem i funkcja $\nu : k^* \to \mathbb{Z}$ spełnia:
   (a) $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$,
   (b) $\nu(a) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \nu(1+a) \geqslant 0$,

   to ν jest waluacją.

6. Niech $K \subseteq L$ będzie rozdzielczym rozszerzeniem ciał stopnia n. Udowodnić, że funkcja
$$\nu : L^* \to \mathbb{Q}, \quad \nu(a) := \frac{v(N_{L/K}(a))}{n}$$
   jest waluacją rozszerzającą v.

7. Znaleźć konkretny wzór opisujący waluację na L rozszerzającą v dla dowolnego rozszerzenia $K \subseteq L$ stopnia n.

8. Znaleźć wielomiany S_1, P_1, S_2, P_2.

9. Znaleźć stopnie wielomianów S_n, P_n oraz ich wyrazy wolne.

10. Niech k będzie ciałem nieskończonym i $F, G \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Udowodnić, że jeśli F i G są równe jako funkcje wielomianowe, to są równe jako wielomany.