Pierścienie Dedekinda, Lista 2

$R \subseteq T$ jest rozszerzeniem pierścieni. Wielomian *unormowany*, to taki w którym współczynnik przy najwyższej potędze jest jedynką.

1. Niech T będzie dziedziną i załóżmy, że rozszerzenie $R_0 \subseteq T_0$ jest algebraiczne. Udowodnić, że jeśli $Q \in \mathrm{Spec}(T)$ i $Q \neq (0)$, to $Q \cap R \neq (0)$.

2. Znaleźć całkowite rozszerzenie $R \subseteq T$ i $Q \in \mathrm{Spec}(T)$ taki, że $Q \neq (0)$, ale $Q \cap R = (0)$.

3. Niech R bedzie dziedziną i $R_0 \subseteq L$ rozszerzeniem ciał. Jeśli $a \in L$ jest algebraiczny nad R_0, to istnieje $r \in R$ taki, że $r \neq 0$ i ra jest całkowity nad R.

4. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym R. Udowodnić, że jeśli $\bar{R}$ jest całkowitym domknięciem R w T, to $\bar{R}_S$ jest całkowitym domknięciem R_S w T_S.

5. Niech T będzie dziedziną i $f \in R[X]$, $g, h \in S[X]$ będą unormowane. Udowodnić, że jeśli $f = gh$, to współczynniki f i g są całkowite nad R.

6. Załóżmy, że R jest normalny i $f \in R[X]$ jest nierozkładalny i unormowany. Udowodnić, że f jest pierwszy.

7. Udowodnić, że R jest całkowicie domknięty w T wtedy i tylko wtedy, gdy $R[X]$ jest całkowicie domknięty w $T[X]$.

8. Niech R będzie dziedziną. Udowodnić, że R jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $R[X]$ jest normalny.