

Pierścienie Dedekinda, Lista 3

1. Niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 i $n > 1$. Udowodnić, że pierścień $K[X_1, \dots, X_n]/(X_n^2 - X_1 \cdot \dots \cdot X_{n-1})$ jest normalny.
2. (Twierdzenie Artina) Niech G będzie grupą, L ciałem oraz

$$\chi_1, \dots, \chi_n : G \rightarrow L^*$$

homomorfizmami, które są parami różne. Udowodnić, że χ_1, \dots, χ_n są L -liniowo niezależne jako elementy przestrzeni funkcji z G w L .

3. Niech $K \subseteq L \subseteq M$ będzie wieżą skończonych rozdzielczych rozszerzeń ciał. Udowodnić, że

$$\text{Tr}_{M/K} = \text{Tr}_{L/K} \circ \text{Tr}_{M/L}.$$

4. Niech $K \subseteq L$ będzie skończonym rozdzielczym rozszerzeniem ciał i $a \in L$. Potraktujmy L jako przestrzeń liniową nad K i rozważmy funkcję K -liniową

$$\phi_a : L \rightarrow L, \quad \phi_a(x) := ax.$$

Udowodnić, że $\text{Tr}_{L/K}(a) = \text{Tr}(\phi_a)$.

5. Niech M' będzie podmodułem modułu M . Udowodnić, że:

$$M \text{ jest noetherowski} \Leftrightarrow M' \text{ i } M/M' \text{ są noetherowskie.}$$

6. Niech M będzie R -modułem noetherowskim oraz

$$\text{Ann}(M) := \{r \in R \mid rM = 0\}.$$

Udowodnić, że $R/\text{Ann}(M)$ jest pierścieniem noetherowskim.

7. Niech M będzie modułem noetherowskim i $f : M \rightarrow M$ epimorfizmem. Udowodnić, że f jest izomorfizmem.
8. Niech R będzie dziedziną i I będzie R -podmodułem R_0 . Załóżmy, że I jest *odwracalny*, czyli istnieje R -podmoduł $I' \leq R_0$ taki, że $II' = R$. Udowodnić, że I jest skończenie generowany.